

お願い

1

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

- 学振165委員会主催「LSI夏の学校」で講演した内容をまとめます。
- A4サイズにした資料をご希望の方は、益までメールをいただくと幸いです。

masuat_at_ieee.org 宛

資料について、理解の間違いなどがありましたらご容赦ください。ご指摘いただけますと幸いです。

Version 2012/10/31

Kazuya Masu

お断り

3

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

- 今回の資料の大部分は、スクラッチで作成したもので、式においては変数の統一性、正負の符号など、チェック切れていないところがあります。
- 自分で計算する際には注意してください。
- 記載した事項については、内外の教科書から転記したのも沢山ありますが、全てについて引用をつけてませんので、ご了解ください。
- また、当日講演に提示した図面以外も掲載してあります。参考になれば幸いです。
- お気づきの点があれば、ご一報いただくと幸いです。
- もし、図面などを二次利用する場合は事前にご連絡いただけますと幸いです。

Version 2012/10/31

Kazuya Masu

チップ内配線にまつわる電気磁気学 Electromagnetism for LSI Interconnect Designers

July 21, 2012
学振第165委員会「VLSI夏の学校」

益 一哉

東京工業大学
異種機能集積研究センター

masu@ieee.org

<http://masu-www.pi.titech.ac.jp/~masu/index.html>

Kazuya Masu

ICE Cube Center

Tokyo Institute of Technology



TOKYO TECH
Pursuing Excellence

Outline

4

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIに利用される材料
 1. 金属(細線効果、表皮効果、周波数依存性)
 2. 絶縁体(誘電損失)
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
 1. 等価回路
 2. 容量
 3. インダクタンス
5. RF回路設計に関わる事柄
 1. 電磁波とアンテナ
 2. 伝送線路
 3. インピーダンスマッチング

Version 2012/10/31

Kazuya Masu



Kazuya Masu

- 電気回路論は、電磁界理論をわかりやすく表現するひとつの方法である。
- 電気回路論(=集積回路設計?)を駆使するには、(避けて通ってきた、或いは避けている)電気磁気学をたまには復習した方が良さそう。
- 特にRF系に関わる研究に携わる場合は、避けて通れないだろう。
- 電気回路論の手法は、電磁界理論を表現しただけではなく、二階の微分方程式の解を表現している「等価回路」という考え方は、異分野融合の架け橋にもなっている。例えば、昔から知られているが、機械振動は電気回路で等価回路表現可能である。電気回路論は異分野融合の切り札のひとつでもある。
- 一度は、電気磁気学を勉強したことを前提に話題提供しよう。

Version 2012/10/31

Kazuya Masu

- KCL Kirchhoff's current Law (KCL)
 - 電流の連続性。任意の1接続点に流入する電流の代数和はゼロである。
 - $\sum I = 0$
 - KVL Kirchhoff's voltage law (KVL)
 - 電圧平衡性。同一方向にすべての起電力及び逆起電力を加えたものはゼロである。
 - $\sum V - \sum IR = 0$
-
- 電磁気学との関係は？ (あるはず)

Version 2012/10/31

Kazuya Masu

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
 1. 金属(細線効果、表皮効果、周波数依存性)
 2. 絶縁体(誘電損失)
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
 1. 等価回路
 2. 容量
 3. インダクタンス
5. RF回路設計に関わる事柄
 1. 電磁波とアンテナ
 2. 伝送線路
 3. インピーダンスマッチング

Version 2012/10/31

Kazuya Masu

微分形		積分形
一般的	$\exp(j\omega t)$ の解	
① $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	⑤ $\text{rot } \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ アンペアの法則 ⑨
② $\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$	⑥ $\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ ファラデーの法則 ⑩
③ $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	⑦ $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum Q_i$ ガウスの法則(電界) ⑪
④ $\text{div } \mathbf{H} = 0$	⑧ $\text{div } \mathbf{H} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ガウスの法則(磁界) ⑫

Version 2012/10/31

su

微分形		積分形
一般的	$\exp(j\omega t)$ の解	
① $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	⑤ $\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ アンペアの法則 ⑨
② $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$	⑥ $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ ファラデーの法則 ⑩
③ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	⑦ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum Q_i$ ガウスの法則(電界) ⑪
④ $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$	⑧ $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ガウスの法則(磁界) ⑫

Version 2012/10/31

su

電流の種類

	電流の種類	発生原理
1	伝導電流	電界により、導体中の電荷(電子、正孔)が移動する。
2	変位電流 ⁽¹⁾	電束密度が時間的に変化するとき存在を仮定した電流
3	分極電流	誘電体が分極する際、電荷の移動が生じる。この場合の分極の時間変化割合を分極電流と定義する。
4	対流電流	電荷を有する物質がある速度で動いているとき、これが原因で生じる電流(オームの法則に従わない、と云う事区別)
5	レントゲン電流	電磁界内で誘電体が運動している場合に生ずる電流

(1) 誘電体内の変位電流は、真空内の変位電流と誘電体内の分極電流の和

Version 2012/10/31

Kazuya Masu

電荷保存則

電荷の総量はいかなる物理的変化の過程においても、一定不変である。現在までのあらゆる実験事実がこれを支持している。

- Maxwellの方程式からも(簡単に)導かれる。
- 変位電流を含めた(Ampereの法則)。発散をとる。

$$\begin{aligned}
 & \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
 & \text{div rot } \mathbf{H} = 0 \\
 & \text{div} \left(\mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \text{div } \mathbf{i}_c + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \text{div } \mathbf{E}) \\
 & \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\
 & \therefore \text{div } \mathbf{i}_c + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0
 \end{aligned}$$

電荷保存則

Version 2012/10/31

Kazuya Masu

(参考) ベクトル公式

13

TOKYO TECH Pursuing Excellence

$$\text{rot grad } \phi = 0$$

$$\text{grad } \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\text{rot grad } \phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (\text{rot grad } \phi)_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0$$

$$(\text{rot grad } \phi)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0$$

$$(\text{rot grad } \phi)_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0$$

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

(参考) ベクトル公式

14

TOKYO TECH Pursuing Excellence

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

grad rot \mathbf{A}

$$= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left\{ \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

電荷保存則とKirchhoffの法則

15

TOKYO TECH Pursuing Excellence

● KCL Kirchhoff's current Law (KCL)

- 電流の連続性。任意の1接続点に流入する電流の代数和はゼロである。

$$\sum I = 0$$

電荷保存則を結合点に適用することで導出される。

● KCL Kirchhoff's voltage law (KCL)

- 電圧平衡性。同一方向にすべての起電力及び逆起電力を加えたものはゼロである。

$$\sum V - \sum IR = 0$$

起電力を含むOhmの法則を閉路回路に沿って積分することで導出される。

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

Maxwell's equations (準定常電流)

16

TOKYO TECH Pursuing Excellence

	一般のME	準定常電流が流れる場合	
①	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}_c + \cancel{\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}$	この3式を解けば良い。
		$\mathbf{i}_c = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{ex})$ Ohm's Law	
②	$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$	$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	
③	$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0$	
④	$\text{div } \mathbf{H} = 0$	$\text{div } \mathbf{H} = 0, \text{div } \mathbf{B} = 0$	

1. 導体の中に伝導電流が流れている場合(交流理論)
2. 導体内部では、変位電流は無視できる。
3. 電場は導体内部のみ、磁場は全領域に存在する。

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

$$\left| \frac{\text{変位電流}(i_d)}{\text{伝導電流}(i_c)} \right| = \left| \frac{\epsilon \frac{\partial E(\mathbf{r}, t)}{\partial t}}{\sigma E(\mathbf{r}, t)} \right| = \left| \frac{\epsilon \omega E_o(\mathbf{r}, t) e^{j\omega t}}{\sigma E_o(\mathbf{r}, t) e^{j\omega t}} \right| = \left| \frac{\epsilon \omega}{\sigma} \right|$$

周期的変化

$$\omega_d \equiv \frac{\sigma}{\epsilon_o}_{for Cu} = \frac{1/(1.7 \times 10^{-6} [\Omega \cdot cm])}{8.854 \times 10^{-12} [F/m]} \approx 6 \times 10^{18} \left[\frac{1}{s} \right]$$

- $f_d \ll 10^{18}$ [Hz] では、**伝導電流 >> 変位電流**
- 通常の集積回路(電気回路)を取り扱う範囲では、導体中の電流は「伝導電流」のみを取り扱えば良い。
- (考察)半導体中では？

- ①式②式のrotをとって整理すると、波動方程式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

このベクトル公式を利用する。

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

修正

- 電波の進行方向は z 方向。
 - 電界は E_x 成分のみ
 - 交番電磁界 $E_x = E_{x0}(z)e^{+j\omega t}$
- とすると平面波の解が得られる。

$$\frac{\partial^2 E_{x0}(z)}{\partial z^2} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)E_{x0}(z) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E_{x0}(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{x0}(z)$$

$$\gamma = \{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\}^{1/2} = \alpha + j\beta$$

伝搬定数
propagation constant

減衰定数
attenuation constant

伝搬定数
phase constant

- 電界は E_x 成分、磁界は H_y 成分のみとなる。

$$E_{x0}(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}$$

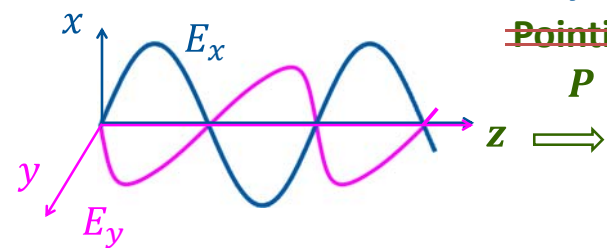
$$H_{y0}(z) = \frac{1}{\eta} (Ae^{-\gamma z} - Be^{+\gamma z})$$

- η :固有インピーダンス

Poynting vector

~~Pointing vector~~

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$



● 伝搬定数

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} - 1 \right) \right\}^{1/2} \left[\frac{\text{Nep}}{\text{m}} \right]$$

$$\beta = \omega \left\{ \frac{\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} + 1 \right) \right\}^{1/2} \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

● 特性インピーダンス(固有インピーダンス)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}}} \quad [\Omega] \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \quad [\Omega]$$

● $\sigma = 0$ (理想的絶縁体、真空中に相当)

■ 減衰定数 $\alpha = 0$ [Nep/m]

■ 位相定数 $\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ [rad/m]

■ 位相速度 $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ [m/sec] $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$

■ 固有インピーダンス

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [\Omega]$$

真空中 $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \quad [\Omega]$

● $\sigma \neq 0$ (損失のある媒体を伝搬するとき)

$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ のとき $\Rightarrow f \ll \frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \approx \frac{1/(2 \times 10^{-8} \Omega\text{m})}{8.8 \times 10^{-32} \text{ F/m}} \approx 10^{18} [\text{Hz}]$

■ 減衰定数 $\alpha = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$ [Nep/m]

■ 位相定数 $\beta = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$ [rad/m]

■ 位相速度 $v = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$ [m/sec]

■ 固有インピーダンス $\alpha = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (1 + j)$ [Ω]

1. 電気回路と電磁気学

2. Maxwellの方程式

3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料

1. 金属(細線効果、表皮効果、周波数依存性)

2. 絶縁体(誘電損失)

4. 配線モデリングに役に立つ事柄

1. 等価回路

2. 容量

3. インダクタンス

5. RF回路設計に関わる事柄

1. 電磁波とアンテナ

2. 伝送線路

3. インピーダンスマッチング

3. Maxwellの方程式とLSIに利用される材料

1. 金属(細線効果、表皮効果、周波数依存性)
2. 絶縁体(誘電損失)
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
 1. 等価回路
 2. 容量
 3. インダクタンス
5. RF回路設計に関わる事柄
 1. 電磁波とアンテナ
 2. 伝送線路
 3. インピーダンスマッチング

		抵抗率	
導体	conductor	電気を通す	$10^{-6} - 10^{-4} [\Omega\text{cm}]$
半導体	semiconductor	適度に電気を通す	$10^{-4} - 10^4 [\Omega\text{cm}]$
絶縁体	insulator	電気を流さない	$10^6 - 10^{14} [\Omega\text{cm}]$

$$J = \sigma E, \text{ or } E = \rho J$$

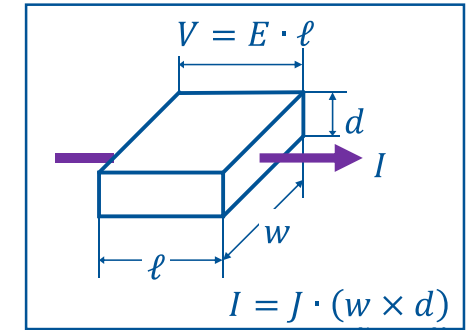
J : 電流密度 (A/cm²)

E : 電界強度 (V/cm)

σ : 導電率 (conductivity)

ρ : 抵抗率 (resistivity)

$$\rho = 1/\sigma$$



配線の抵抗

- 金属の抵抗率くらいは覚えておこう。

Ag $1.6 \times 10^{-6} [\Omega\text{cm}]$ at RT

Cu $1.7 \times 10^{-6} [\Omega\text{cm}]$ at RT

Al $2.7 \times 10^{-6} [\Omega\text{cm}]$ at RT

- 講演では、緩和時間にまつわる話題について、少し紹介する。

$$\sigma = e\mu n \quad \mu = \frac{e}{m} \langle \tau \rangle$$

物理量と単位 - SI単位系 (MKSA単位系)

組立単位	読み	単位	他の表記	基本単位による組立
速度				m/s
加速度				m/s ²
力	Newton	N	kg·m/s ²	F=ma
エネルギー	Joule	J	kg·m ² /s ²	J = N·m
電流	Ampere	A		
電圧	Volt	V	J/C	m ² ·kg·s ⁻³ ·A ⁻¹
電力 or 仕事率	Watt	W	kg·m ³ /s ²	W = J/s
電荷	Coulomb	C	A·s	s·A
磁束	Weber	Wb	V·s	m ² ·kg·s ⁻² ·A ⁻¹
磁束密度	Tesla	T	Wb/m ²	kg·s ⁻² ·A ⁻¹
抵抗	Ohm	Ω	V/A	m ² ·kg·s ⁻³ ·A ⁻²
インダクタンス	Henry	H	Wb/A	m ² ·kg·s ⁻² ·A ⁻²
容量	Farad	F	C/V	m ⁻² ·kg ⁻¹ ·s ⁴ ·A ²

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m] \quad \epsilon_0 = (1/\mu_0 c_0^2) [F/m] \quad c_0: \text{光速} \quad \text{Kazuya Masu}$$

Rank of Tensor		
0	Scalar	温度、比熱
1	Vector	電界、磁界
2		応力、ひずみ、誘電率、導電率
3		圧電定数、非線形光学定数
4		弾性コンプライアンス、スティフネス

M階のテンソルとn階のテンソルの関係を表すのは(m+n)階のテンソル。

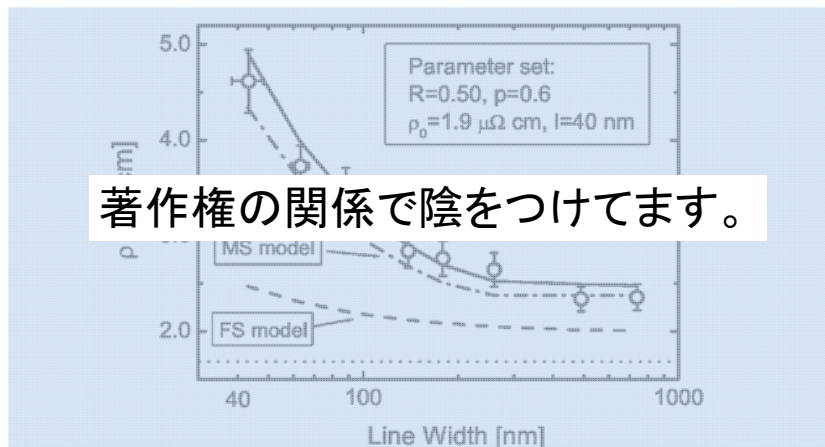
$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

1階のテンソル（電界）と1階のテンソル（電流）の関係を表す導電率は、2階のテンソルである。パラメータは9つ！

- 導電率 σ は、2のテンソル
 - パラメータは9つ。（一般的にはスカラーではない）
- 導電率テンソルは、一般に対称テンソル ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) ← $P = E \cdot J = J \cdot E$ より証明可。
- 結晶の対称性を考慮すると、Siでは対角要素しか残らない 😊

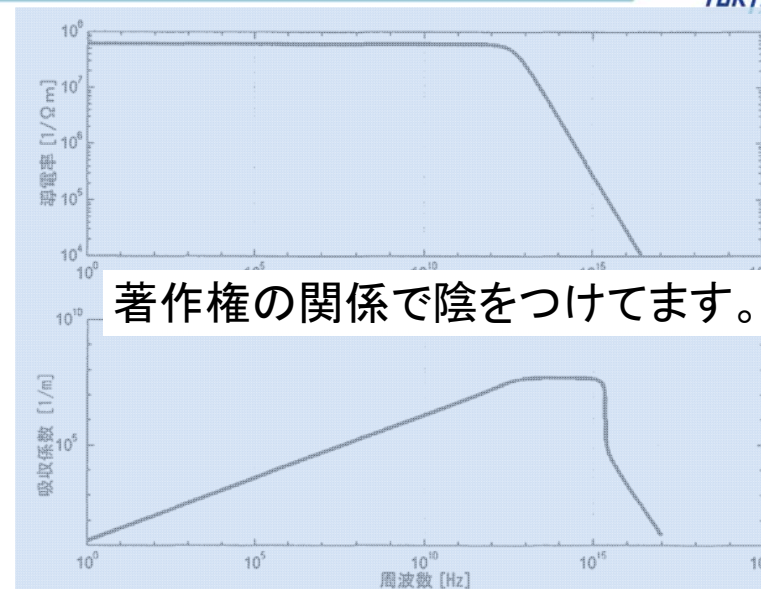
立方晶系	六方晶系
<ul style="list-style-type: none"> ● 面心立方格子 ● 体心立方格子 ● ダイヤモンド構造 ● Zinc Blende構造 $\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix}$

- 線幅が小さくなると抵抗率が上昇する。

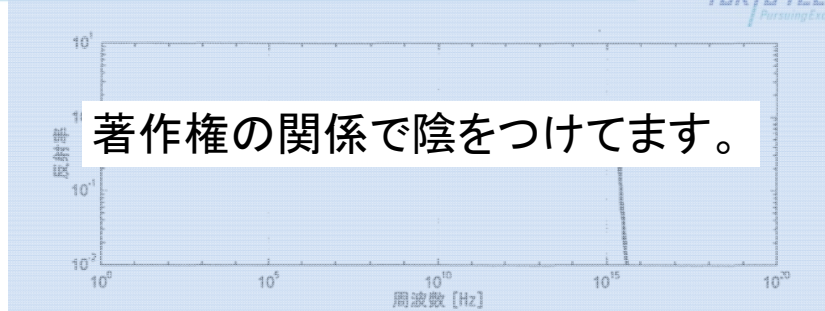


著作権の関係で陰をつけてます。

Werner Steinhog, et al, "Size-dependent resistivity of metallic wires in the mesoscopic range", PHYSICAL REVIEW B66, 075414 (2002)



著作権の関係で陰をつけてます。



- 銅の電気特性の周波数依存性(計算値).
- 導電率は緩和周波数(4THz)まで一定であり、緩和周波数において減衰が開始する.
- 反射率は可視光領域まではほぼ1である.
- 吸収係数は近赤外線領域まで増加し、赤外で一定となる.紫外線領域において吸収係数は急激に減少する.

Ron Schmitt, Electromagnetics Explained (LSI技術者のための親切的な電気磁気学)” Kazuya Masu

● 物性論的には、

1. Drude Model

$$\frac{m_0}{2} v_{th}^2 = \frac{3}{2} kT$$

- 電子を粒子として取り扱う。古典的分子運動論を適用。
- それでもいろいろ分かる。

2. Sommerfeld Model

- Fermi速度で電子は運動する。有効質量

$$\frac{m_0}{2} v_F^2 = E_F \quad E_F = 8 \sim 10 \text{ eV}$$

3. バンド理論、Boltzmannの輸送方程式・・・と続く

- 半導体を嚙るには、バンド理論などは多少勉強した方が良い。

4. 古典論、半古典論だけでも、いろいろとわかる。

金属中の電子伝導(古典論)

● 電子(粒子)の運動方程式

$$m_e \left[\frac{dv}{dt} - \frac{v}{\tau} \right] = -eE$$

● $\frac{dv}{dt} = 0$ の定常状態。 $J = -en_e nv$, $J = \sigma E$ より、

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e} \quad \text{直流導電率、}\sigma(0)\text{と記述する。}\tau: \text{緩和時間}$$

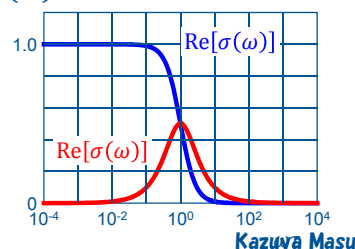
● $E(t) = E(\omega)e^{-j\omega t}$ として、 $v(t) = v(\omega)e^{-j\omega t}$ の解を求める。

$$J(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 - j\omega\tau} E(\omega)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 + (\omega\tau)^2} + j \frac{\omega\tau \cdot \sigma(0)}{1 + (\omega\tau)^2}$$



電子密度、導電率
本稿では「導電率緩和時間」と称する。



金属中の電子

● $\nabla \times H = j_c + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$ の発散をとる。

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \text{div}(\sigma E) + \text{div} \left(\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{ベクトル公式})$$

$$\sigma \text{div} E + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} E)$$

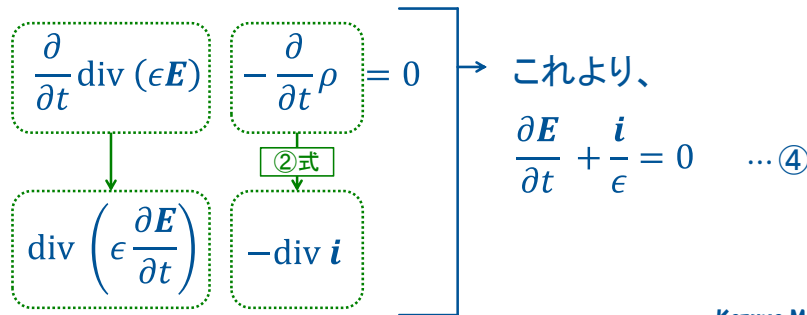
● $\text{div} E = \frac{\rho}{\epsilon}$ より、 $\frac{\sigma}{\epsilon} \rho + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$ となる。これを解いて

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_d}\right), \text{ where } \tau_d = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad \text{誘電緩和時間}$$

● 仮に、導体内部に電子が存在(密度分布が変化)しても、 τ_d の時間で拡散して、導体表面へ移動する。

プラズマ周波数 ω_p (1)

- 荷電粒子の運動方程式 $m \left[\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v}{\tau} \right] = -eE \dots \textcircled{1}$
- 電荷保存の式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } i \dots \textcircled{2}$
- Gaussの法則 $\text{div}(\epsilon E) = \rho \dots \textcircled{3}$
- ③の発散をとって変形する。



Kazuya Masu

プラズマ周波数 ω_p (2)

- ④式は、 $\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{i}{\epsilon} = 0$
- ①を微分して、 $-\frac{m}{e} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} E$
- 電流 i は、 $i = -en_e v$ これらを④式に代入して、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{e^2 n_e}{m \epsilon} v = 0 \dots \textcircled{5}$$

- これは、 $v = v_o(r) \exp(-j\omega_p t)$ の解をもつ。

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{m \epsilon}}$$

● これは、プラズマ中で荷電粒子に濃度分布が存在すれば、 ω_p で振動することを示す。
● ω_p より大きな振動数の電磁波はプラズマを透過する。

Kazuya Masu

金属の誘電率(周波数特性) Drudeの式 39

- 金属中の自由電子 $m \left[\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v}{\tau} \right] = -eE \dots \textcircled{1}$
- $v = \frac{\partial u(r,t)}{\partial t}$ として、 $m \frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2} + \frac{m}{\tau} \frac{\partial u(r,t)}{\partial t} + eE = 0 \dots \textcircled{2}$
- $E(t) = E_o(\omega)e^{-j\omega t}$, $u(t) = u_o(\omega)e^{-j\omega t}$ の解を仮定する。

$$u_o(\omega) = \frac{e E_o}{m \omega^2 (1 + j(1/\omega\tau))}$$

- 自由電子による分極 P : $P(\omega) = -en_e u_o(\omega)$
- $D(\omega) = \epsilon_o E_o(\omega) + P(\omega)$, $D(\omega) = \epsilon_r \epsilon_o E_o(\omega)$ であることから、

$$\epsilon_r = 1 - \frac{e^2 n_e}{m \epsilon_o \omega^2 \left(1 + j \frac{1}{\omega\tau} \right)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \left(1 + j \frac{1}{\omega\tau} \right)}$$

Kazuya Masu

金属の性質(周波数特性) (2) 複素屈折率

- $\hat{\epsilon}_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 (1 + j\frac{1}{\omega\tau})} = \epsilon_1 + j\epsilon_2$
- 複素屈折率 $\hat{n} \equiv \sqrt{\hat{\epsilon}_r} = n + jk$
- ここで、

$\hat{\epsilon}_r$ は複素数であることを明示的に意味する。

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{m \epsilon_o}}$$

プラズマ周波数

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau}{m}$$

- σ : 導電率
- m : 電子の質量
- n_e : 単位体積当たりの電子数
- τ : 導電率緩和時間

Kazuya Masu

Hagen-Rubens' relation

41

TOKYO TECH Pursuing Excellence

- $n^2 - k^2 = 1 - \omega_p^2 \tau^2, 2nk = \frac{\omega_p}{\omega} \omega_p \tau$ を解く。(結構嫌らしい。)

$$n = \sqrt{\frac{1}{2\omega} \sqrt{\omega\alpha + \sqrt{\tau^2 \omega_p^4 + \omega^2 \alpha^2}}}$$

ここで、 $\alpha = (1 - \tau^2 \omega_p^2)$

$$k = \sqrt{\frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{\tau \omega_p^2} \right) \sqrt{\omega\alpha + \sqrt{\tau^2 \omega_p^4 + \omega^2 \alpha^2}} \left(-\omega\alpha + \sqrt{\tau^2 \omega_p^4 + \omega^2 \alpha^2} \right)}$$

- $\omega \rightarrow 0$ のとき $n \approx k \rightarrow \sqrt{\frac{\omega_p^2 \tau}{2\omega}}$

- これをHagen-Rubens' relation と云う。

http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-58j-radiative-transfer-spring-2006/readings/chap6_solid_prop.pdf

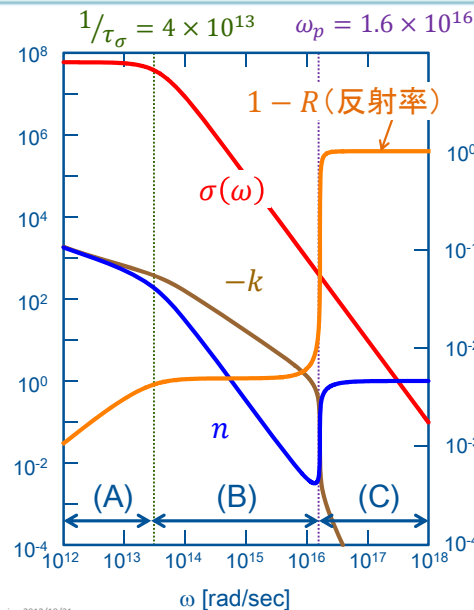
Version 2012/10/31

金属の性質(周波数特性)
(Drudeモデル)

(3) 複素屈折率

42

TOKYO TECH Pursuing Excellence



1. 領域(A): $\omega < 1/\tau\sigma$
 $\tau\sigma$: 導電率緩和時間、Hagen-Rubens領域
2. 領域(B):
緩和領域: $1/\tau\sigma < \omega < \omega_p$
3. 領域(C): $\omega_p < \omega$
 ω_p : プラズマ周波数
金属は透明になる。AllはDrudeのモデルに従うが、従わない金属も多い。

- J. M.Ziman, Principles of the theory of Solids, 2nd ed. (固体物性論の基礎), 訳本図148を参考に計算。物性値はCu。
- 昔の本は、cgs単位系で記述されているので計算するときは注意。

Kazuya Masu

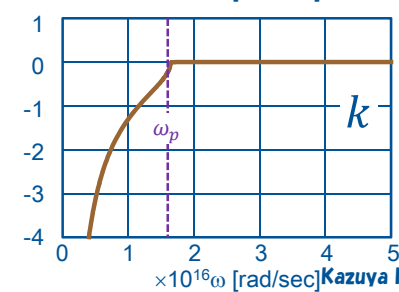
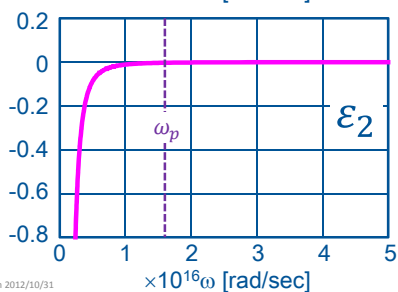
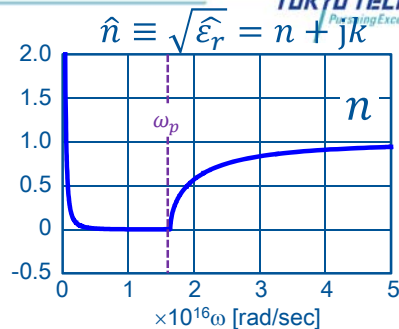
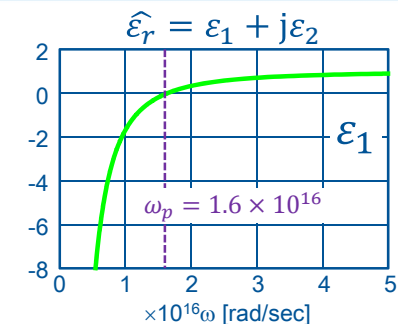
Version 2012/10/31

金属の性質(周波数特性)
(Drudeモデル)

(4) 複素屈折率

43

TOKYO TECH Pursuing Excellence



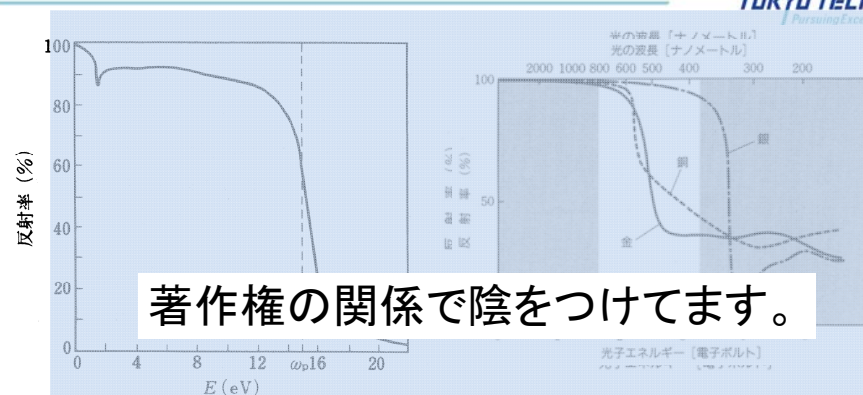
Kazuya Masu

Version 2012/10/31

金属の反射率の実際

44

TOKYO TECH Pursuing Excellence



著作権の関係で陰をつけてます。

- Alの反射スペクトラム。プラズマ周波数 ω_p で反射率は大きく変化する。 $\omega_p = 14.7$ [eV]

- 金、銀、銅の反射率。
- プラズマ周波数より低いエネルギー(長波長)で、反射率は変化する。

H. Ehrenreich, H.R. Philipp and B. Segall, Phys. Rev., 132 (1963), 1918. (水谷宇一郎「金属電子論(下)」内田老鶴園 (1996) p.319より引用)

http://home.sato-gallery.com/education/kouza/metal_color_seminar.pdf

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

- 金属を考えるとプラズマ周波数、誘電緩和時間、導電率緩和時間の間に関係がある。この関係になることの物理的必然性は何だろうか？ そもそも必然性はあるのだろうか？

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{\epsilon m} = \frac{1}{\tau_d \tau_\sigma}$$

$$(\text{プラズマ周波数})^2 = \frac{1}{(\text{誘電緩和時間})(\text{導電率緩和時間})}$$

	単位	アルミニウム	銅	銀
原子番号		13	29	47
結晶構造		面心立方格子	面心立方格子	面心立方格子
原子量	g·mol ⁻¹	26.9815386	63.564	107.8682
格子定数	nm	0.40496	0.36147	0.4086
密度(室温)	g·cm ⁻³	2.70	8.94	10.49
融点	°C	660.32	1084.62	961.78
抵抗率(20°C)	μΩ·cm	2.82	1.678	1.587
熱伝導率(300K)	W/m·K	237	401	429
ヤング率	GPa	70	110-128	83
単位体積当りの原子数	1/cm ³	6.026×10 ²²	8.46988×10 ²²	5.85643×10 ²²

Avogadro constant N_A=6.02214129×10²² [1/mol]

	単位	アルミニウム	銅	銀
プラズマ周波数 f_p	Hz	2.2×10 ¹⁵	2.6×10 ¹⁵	2.2×10 ¹⁵
1/ f_p	Sec	4.5×10 ⁻¹⁶	3.8×10 ⁻¹⁶	4.6×10 ⁻¹⁶
誘電緩和時間 τ_d	Sec	2.5×10 ⁻¹⁹	1.5×10 ⁻¹⁹	1.4×10 ⁻¹⁹
1/ τ_d	Hz	4.0×10 ¹⁸	6.7×10 ¹⁸	7.1×10 ¹⁸
導電率緩和時間 τ_σ	Sec	2.1×10 ⁻¹⁴	2.5×10 ⁻¹⁴	3.8×10 ⁻¹⁴
1/ τ_σ	Hz	4.8×10 ¹³	4.0×10 ¹³	2.6×10 ¹³
移動度	cm ² /Vsec	37	44	67

プラズマ周波数	$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon m}}$	導電率緩和時間	$\tau_\sigma = \frac{m \sigma}{e^2 n_e}$ $\sigma (= 1/\rho)$: 導電率
誘電緩和時間	$\tau_d = \frac{\epsilon}{\sigma}$	移動度: μ	$\mu = \frac{e}{m} \tau_\sigma$

- 理想的金属(抵抗=0)の金属には、電磁界は侵入しない。しかし、有限の抵抗率をもつ金属には電磁界は侵入する。
- また、金属線に電流が流れるとき、電流は線の周囲に集中する(表皮効果)
- その厚さを「表皮厚さ」という。減衰定数の逆数となる。

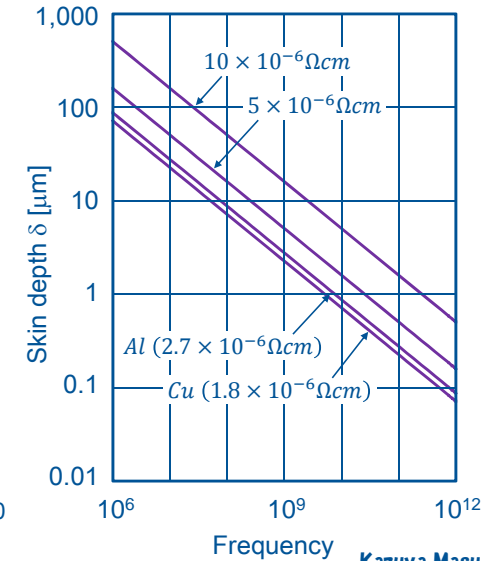
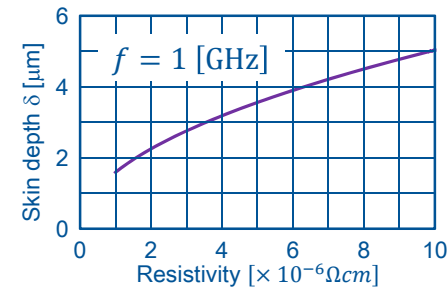
- $\sigma \neq 0$ のとき、電磁波は $e^{-\alpha x}$ で減衰する。
- 距離 ($\delta = 1/\alpha$) 進むと、振幅は $1/e$ に減衰する。

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f\mu}} \quad \text{表皮厚さ Skin depth}$$

δ : 表皮厚さ (Skin depth)
 σ : 導電率 ρ : 抵抗率
 μ : 透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$
 ω : 角周波数 f : 周波数

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f\mu}}$$

ω : 各周波数, f : 各周波数
 σ : 導電率, ρ : 抵抗率
 μ : 透磁率 ($\approx 4\pi \times 10^{-7}$)



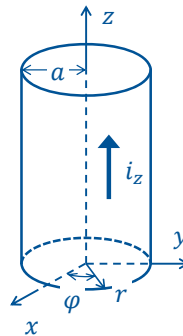
円筒導体に流れる電流 (表皮効果) (1)

- 半径 a の円筒導体に z 方向のみに i_z が流れる。満たすべき Maxwell の方程式 (準定常電流に相当する) $f_a \equiv \frac{1}{2}\pi \frac{\sigma}{\epsilon_0} \approx 10^{18} [Hz]$ 以下

$$\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \text{拡散方程式と同じ形}$$

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

- $i_r(\mathbf{r}, t) = i_\phi(\mathbf{r}, t) = 0$ であり、 $i_z(\mathbf{r}, \phi, z, t)$ は r だけの関数 $i_z(r, t)$ とする。
- Ohm の法則から、 $E_r(\mathbf{r}, t) = E_\phi(\mathbf{r}, t) = 0$
- $E_z = E_z(r, t)$ のみ存在する。 $i_z(r, t) = \sigma E_z(r, t)$



変形に利用する式

- 円筒座標

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \phi \\
 y &= r \sin \phi \\
 z &= z
 \end{aligned}$$

- Laplacian

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Rotations

$$\begin{aligned}
 (\text{rot } \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_\phi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi}
 \end{aligned}$$

円筒導体に流れる電流(表皮効果)(2) 53

- $E_z(r, t)$ の満たすべき微分方程式

$$\frac{\partial^2 E_z(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z(r, t)}{\partial r} = \sigma \mu \frac{\partial E_z(r, t)}{\partial t}$$

- $E_z(r, t) = E_z(r) e^{j\omega t}$ として、定常解を求める。このとき満たすべき微分方程式は

$$\frac{d^2 E_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z(r)}{dr} + k^2 E_z(r) = 0$$

Skin depth

where $k^2 = -j\sigma\mu\omega$

$$k = \frac{1-j}{\delta}, \text{ and } \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$$

この解は、Bessel関数

Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果)(3) 54

- $E_z(r) = A J_0(kr)$ ここで、 A は任意定数。
- $i_z(r) = \sigma E_z(r)$ である。円筒形全体に流れる電流を I とする。

$$\int_0^a 2\pi r i_z(r) dr = I, \text{ where } i_z(r) = \sigma A J_0(kr)$$

- $A = \frac{k}{2\pi\sigma a} \frac{I}{J_1(ka)}$ と定めることができ、

$$E_z(r) = \frac{k I}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)}$$

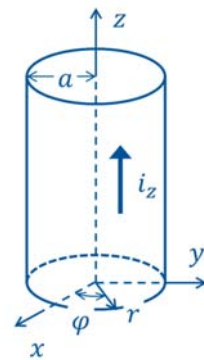
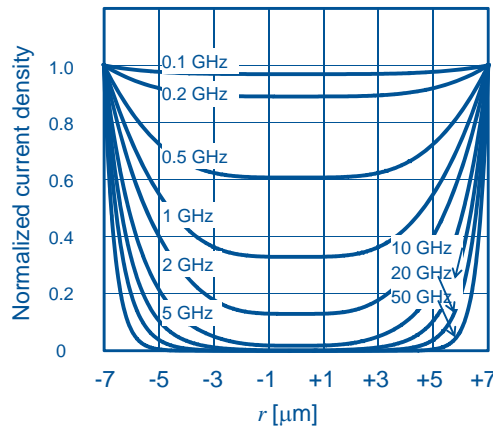
$$i_z(r) = \frac{k I}{2\pi a} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)}$$

と解くことができる。

砂川重信「理論電磁気学(第3版)」、(紀伊屋書店)に電流密度まで求める手順が示されている。電気磁気学の教科書には珍しい。

Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果)(4) 55



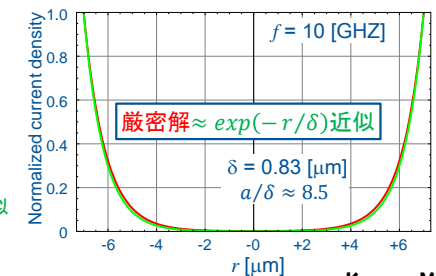
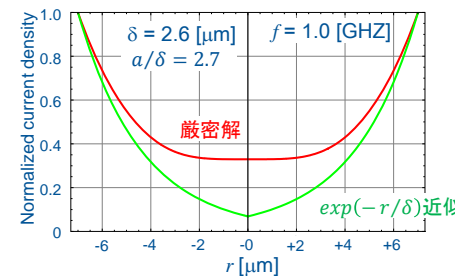
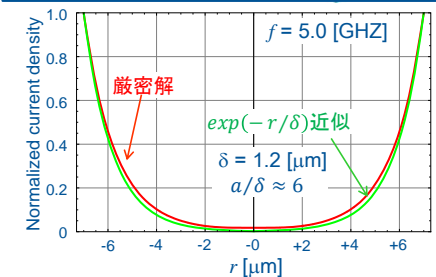
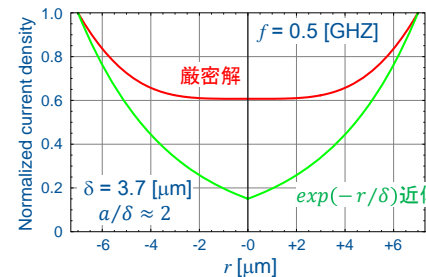
- 金属として、Alを想定 ($2.7 \mu\Omega\text{cm}$)
- 直径 ($2a$) = $7 \mu\text{cm}$

- 表皮厚さ (δ)
- $\delta = 2.6 \mu\text{m}$ at 1 GHz
- $\delta = 0.83 \mu\text{m}$ at 10 GHz

Kazuya Masu

円筒導体に流れる電流(表皮効果)(5) 56

$a > 6\delta$ であると、分布は近似式を利用可能。



Kazuya Masu

$$Z = R_{eff} + jX_{eff} = R_{eff} + j\omega L_{eff} \quad 57$$

- $E_z(r) = \frac{kI}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)}$ より、 $r = a$ における電界強度を z 方向に $0 \sim \ell$ で積分して、電圧降下 V を求める。

$$V = \int_0^\ell E_z(r=a) dz = \frac{kI\ell}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}$$

- 全電流は I であるから、 $Z_{eff} = V/I$ より実効インピーダンスを求めることができる。

$$Z_{eff} = \frac{k\ell}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}$$

$$k = \frac{1-j}{\delta}, \text{ and } \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$$

$$\text{or } k = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma\mu\omega}$$

σ : 導電率

a : 導体の半径

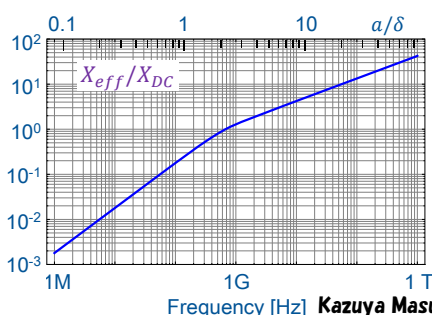
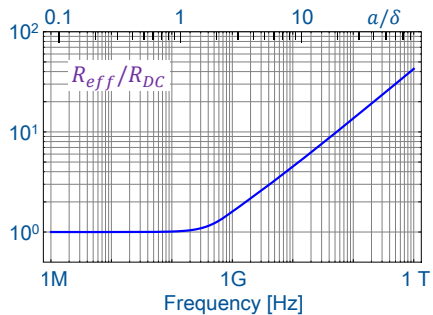
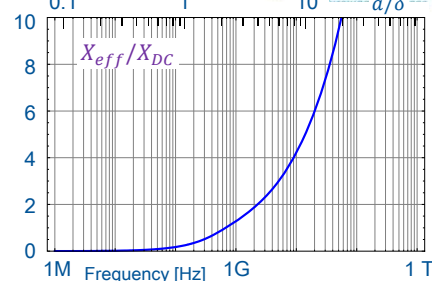
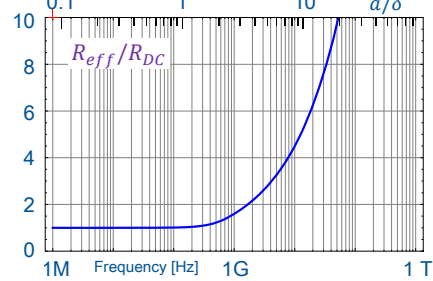
$$Z = R_{eff} + jX_{eff} = R_{eff} + j\omega L_{eff} \quad 58$$

- 伝送線路のテキストでは、 $Z_{eff} = \frac{k\ell}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}$ を Bessel関数ではなくKelvin関数を用いて表現していることがある。

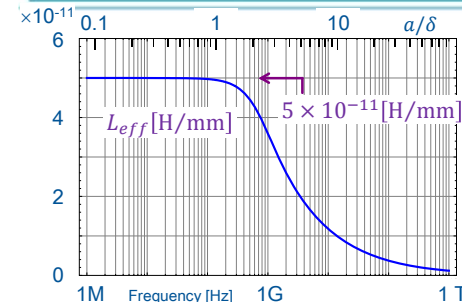
$$Z_{eff} = \frac{k\ell}{2\pi\sigma a} \frac{Ber_0(x) + jBer_0(x)}{(-1)\{Ber_1(x) + jBer_1(x)\}},$$

where $x = \sqrt{2}a/\delta$

$$Z = R_{eff} + jX_{eff} = R_{eff} + j\omega L_{eff} \quad 59$$

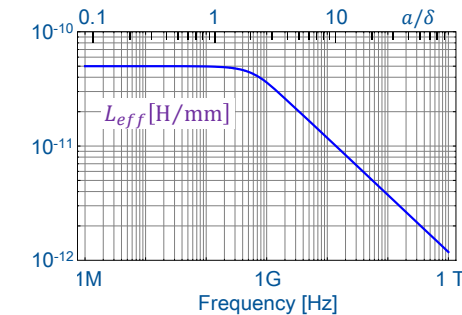


$$Z = R_{eff} + jX_{eff} = R_{eff} + j\omega L_{eff} \quad 60$$

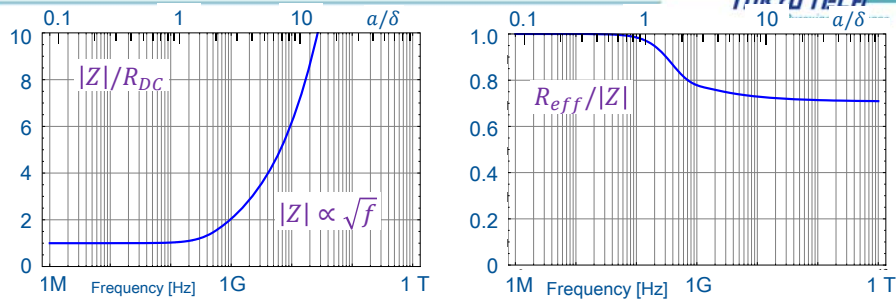


- L_{eff} : 内部自己インダクタンス
- 円筒内部に均一に電流が流れているとき

$$L_{eff} = \frac{\mu}{8\pi} = 5 \times 10^{-8} \left[\frac{H}{m} \right]$$



- 表皮効果により、電流が円筒周囲に偏ると内部磁気エネルギーはゼロになるので、内部自己インダクタンスはゼロに漸近する。

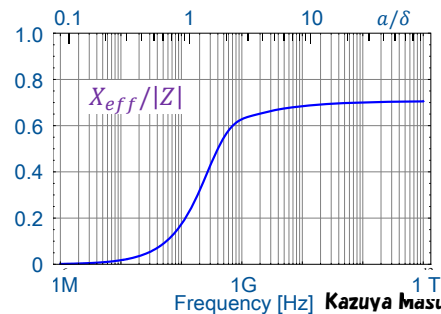


At high frequency

$$|Z| \propto \sqrt{f}$$

$$X_{eff}/R_{eff} \rightarrow 1$$

$$Z \propto (1 + j)$$



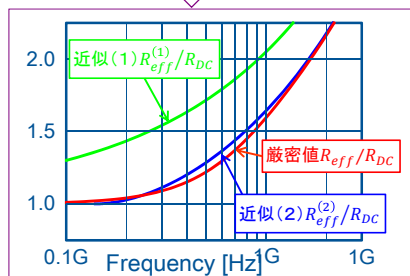
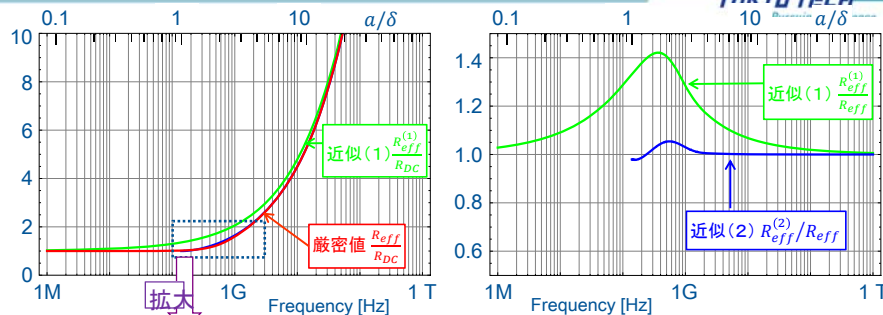
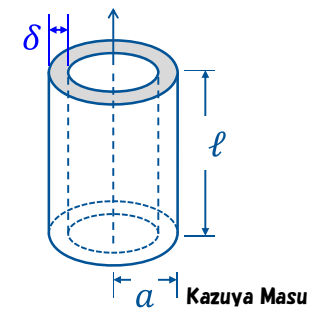
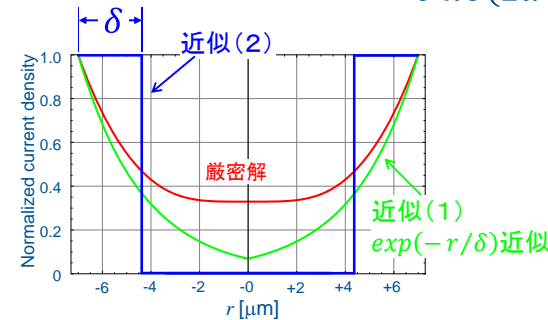
- 抵抗成分近似式を求める。適当な電流分布を仮定。

近似(1)

$$R_{eff}^{(1)} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{2\pi\delta(a - \delta + \delta e^{-a/\delta})}$$

近似(2)

$$R_{eff}^{(2)} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{\pi\delta(2a - \delta)}$$



- 表皮効果による抵抗増加分は、「近似(2)」で十分計算可能である。(誤差は最大でも5%)
- 「近似(2)」とは、表皮厚さ部分に電流が流れると仮定する単純なモデル。



(参考) Bessel functions

- Bessel's differential equation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)u = 0 \quad \text{の解は、} J_\alpha(x) \text{ と } Y_\alpha(x)$$

$J_\alpha(x)$: 第一種ベッセル関数

$Y_\alpha(x)$: 第二種ベッセル関数 (Neumann関数)

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m + \alpha}$$

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad Y_n(x) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x)$$

(参考) Modified Bessel functions

65

● Bessel's differential equation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right)u = 0 \quad \text{の解は、} I_\alpha(x) \text{ と } K_\alpha(x)$$

$I_\alpha(x)$: 第一種変形ベッセル関数

$K_\alpha(x)$: 第二種変形ベッセル関数

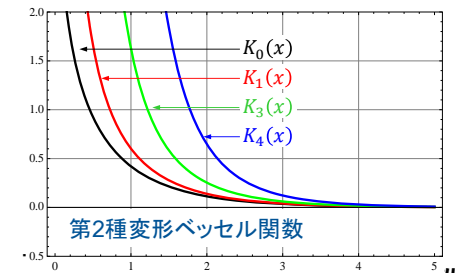
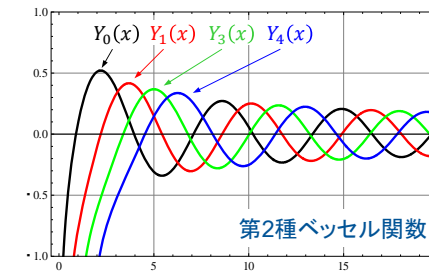
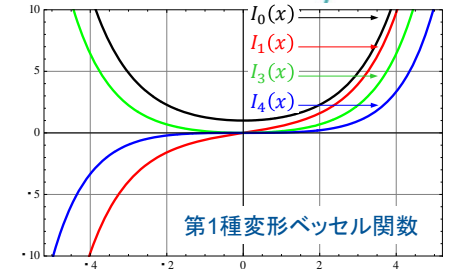
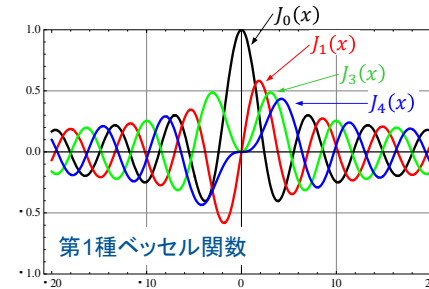
$$I_\alpha(x) = j^{-\alpha} J_\alpha(x)$$

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

Kazuya Masu

(参考) Bessel関数

66



Kazuya Masu

(参考) Kelvin functions (1)

67

● Definition:

- The Kelvin functions $Ber_\nu(x)$ and $Bei_\nu(x)$ are the real and imaginary parts, respectively, of $J_\nu(x e^{3\pi/4})$, where x is real, and $J_\nu(z)$, is the ν th order Bessel function of the first kind.

$$J_\nu(x e^{j3\pi/4}) = Ber_\nu(x) + j Bei_\nu(x), \text{ where } x \text{ is real}$$

$$Ber_0(x) = 1 - \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(4!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^8 - \frac{1}{(6!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{12} \dots$$

$$Bei_0(x) = \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \frac{1}{(5!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{10} - \frac{1}{(7!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{14} \dots$$

$$\sqrt{-j} = e^{j3\pi/4} = \frac{-1+j}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{+j} = e^{j\pi/4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{-j} = e^{-j\pi/4} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{+j} = e^{j5\pi/4} = \frac{-1-j}{\sqrt{2}}$$

Kazuya Masu

(参考) Kelvin functions (2)

68

● Some relations (x is real)

$$J_\nu(x e^{j3\pi/4}) = Ber_\nu(x) + j Bei_\nu(x)$$

$$I_0\left(\pm \frac{-1+j}{\sqrt{2}}x\right) = Ber_0(x) + j Bei_0(x)$$

$$I_0\left(\pm \frac{-1+j}{\sqrt{2}}x\right) = Ber_0(x) - j Bei_0(x)$$

$$I_0\left(\pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}x\right) = Ber_0(x) - j Bei_0(x)$$

$$I_0\left(\pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}x\right) = Ber_0(x) + j Bei_0(x)$$

$$I_1\left(\pm \frac{-1+j}{\sqrt{2}}x\right) = \pm Ber_1(x) \pm j Bei_1(x)$$

$$I_1\left(\pm \frac{-1+j}{\sqrt{2}}x\right) = \mp j Ber_1(x) \mp Bei_1(x)$$

$$I_1\left(\pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}x\right) = \mp Ber_1(x) \pm j Bei_1(x)$$

$$I_1\left(\pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}x\right) = \mp j Ber_1(x) \pm Bei_1(x)$$

- 文献によっては、表皮効果の表式はKelvin関数を用いて表現されている。
- おそらく数値計算を考慮して、数値計算しやすい表現のためと思われる。

Kazuya Masu

$$J_\nu(x e^{j3\pi/4}) = Ber_\nu(x) + j Bei_\nu(x)$$

$$J_0(x j\sqrt{j}) = I_0(x \sqrt{j}) = Ber_0(x) + j Bei_0(x)$$

$$J_0(x j\sqrt{-j}) = I_0(x \sqrt{-j}) = Ber_0(x) - j Bei_0(x)$$

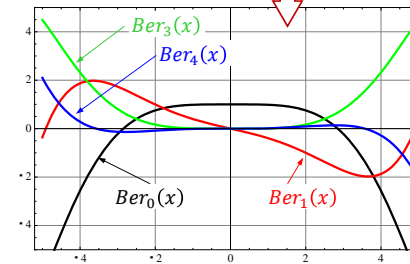
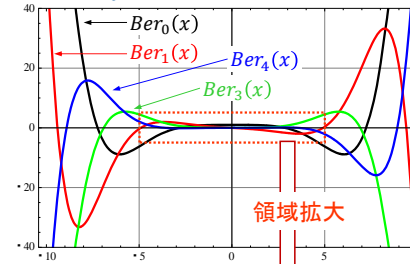
$$j\sqrt{j} = e^{j\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+j}{\sqrt{2}} \quad j\sqrt{-j} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{-j} = e^{j\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+j}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{+j} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

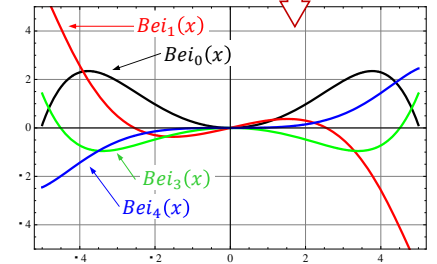
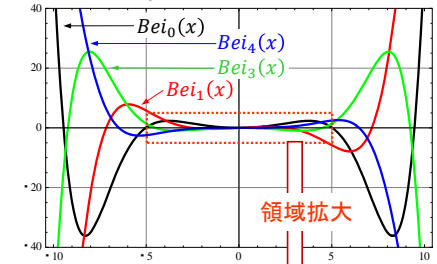
$$\sqrt{-j} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{+j} = e^{j\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1-j}{\sqrt{2}}$$

Kazuya Masu

$Ber_n(x)$



$Bei_n(x)$



Kazuya Masu

特殊関数

- 任意関数は、直交関数で級数展開できる。
- Sin x, Cos xで展開する。(フーリエ級数)
- Bessel関数でも展開できる。
- 他にも、ルジャンドル関数などでも展開できる。
- ベッセル関数は、FM変調のところでもちらっと顔を出す。フィルタ設計の理論でも顔を出しやすい。

Kazuya Masu

誘電損失

- 講義では、誘電損失について、簡単に触れる。
- と思ったが、手が回らなかった。

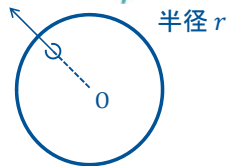


- ちょっとした寄り道で許して……

Kazuya Masu

- 半径 r の球の静電容量

$$C = 4\pi\epsilon_0 r$$



- $r = 6,400km$ (地球の半径)を代入する。
- $C = 4\pi \times 8.854 \times 10^{-12} \left[\frac{F}{m}\right] \times 6,400 \times 10^3[m] = 712[\mu F]$
- これを大きいとみるか？ 小さいとみるか？

- MKS単位系ではこれらの数値はどのように定められるのか？

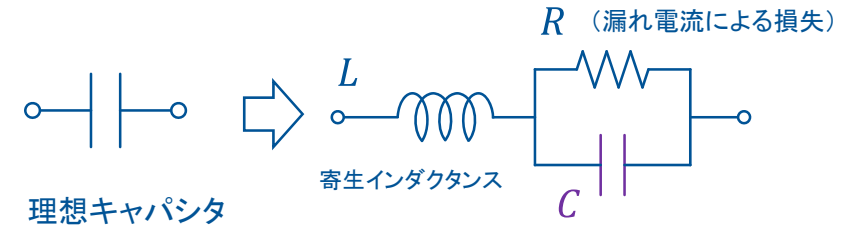
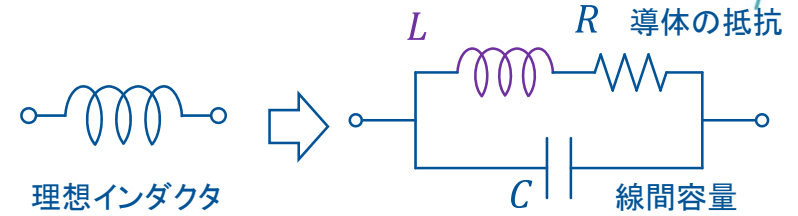
1. Maxwellの方程式から、 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ である。
2. 光速 c は実験的に求められる。
 $c=2.99792458 \times 10^8[m/s]$
3. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}[H/m]$ と定める。(Maxwellの方程式から 4π を消すことができる。)
4. $\epsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12}[F/m]$ となる。

- μ_0 と ϵ_0 があって、光速が定まるのではない事に注意。このことを明示的に記述している本が少ない。

材 料	絶縁性/ 耐熱性	FR グレード	対応 JIS規格	一般的な呼称 (俗称)
紙基材フェノール樹脂	一般的な絶縁性	FR-1	PP7F	紙フェノール基板
紙基材フェノール樹脂	高度な絶縁性	FR-2	PP3F	紙フェノール基板
紙基材エポキシ樹脂		FR-3	PE1F	
ガラス布基材エポキシ樹脂	一般用	FR-4	GE4F	ガラス・エポキシ基板、FR-4基板
ガラス布基材エポキシ樹脂	耐熱性	FR-5	GE2F	ガラス・エポキシ基板
ガラスマット・ポリエステル		FR-6		

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIに利用される材料
 1. 金属(細線効果、表皮効果、周波数依存性)
 2. 絶縁体(誘電損失)
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
 1. 等価回路
 2. 容量
 3. インダクタンス
5. RF回路設計に関わる事柄
 1. 電磁波とアンテナ
 2. 伝送線路
 3. インピーダンスマッチング

- インダクタと容量の基本等価回路について、その周波数特性を理解しておく、オンチップインダクタのモデリングの際に有用である。



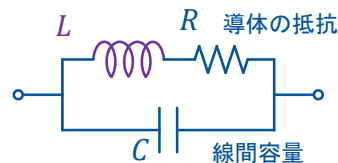
$$Z = \frac{(R + j\omega L) \times \frac{1}{j\omega C}}{(R + j\omega L) + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j\{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2\}}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}$$

- $Im[Z] = 0$ になる周波数 ω_r を求める。 $\omega_o \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$ とする。

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}} < \omega_o, \quad \text{where } 1 - \frac{CR^2}{L} > 0$$

(或いは $\frac{L}{C} > R^2$)

$$Z = \left(\frac{L}{C}\right) \frac{1}{R} \text{ at } \omega = \omega_r$$

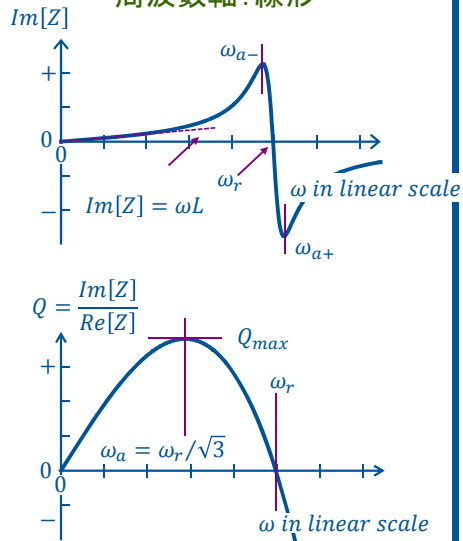


- $Q \equiv \frac{Im[Z]}{Re[Z]}$ と定義し、 Q_{max} になる周波数 ω_a を求める。
($\frac{dQ}{d\omega} = 0$ となる周波数を求める。)

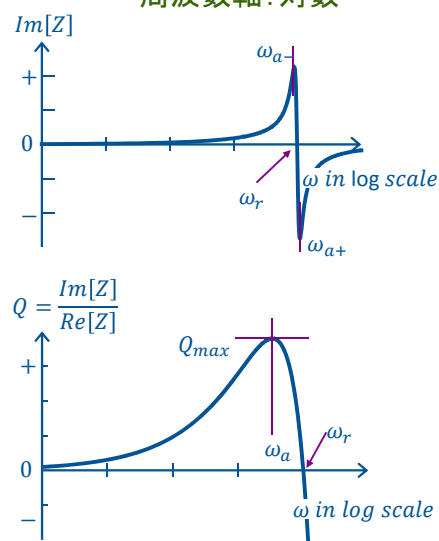
$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}} = \frac{\omega_r}{\sqrt{3}}$$

$$Q_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - \frac{CR^2}{L}\right)^{3/2}, \text{ at } \omega = \omega_a$$

周波数軸: 線形



周波数軸: 対数



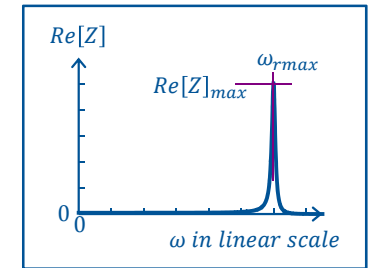
- $Re[Z]$ が最大になる周波数: ω_{Rmax}

($\frac{dRe[Z]}{d\omega} = 0$ となる周波数を求める。)

$$\omega_{Rmax} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{CR^2}{L}} > \omega_r$$

$$Re[Z]_{max} = \frac{1}{R} \left(\frac{L}{C}\right) \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4}\right) \frac{CR^2}{L}} \right]$$

at $\omega = \omega_{Rmax}$



$$Im[Z] \Big|_{\omega=\omega_{Rmax}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{CR^2}{L}}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right) \frac{CR^2}{L}} \right]$$

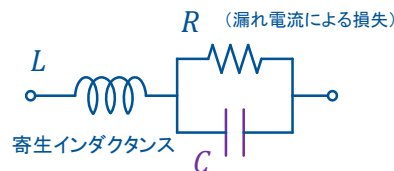
$$Z = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} + j \left\{ \omega L - \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} \right\}$$

- $Im[Z] = 0$ になる周波数 ω_r を求める。 $\omega_o \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$ とする。

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{CR^2}} < \omega_o, \quad \text{where } 1 - \frac{L}{CR^2} > 0$$

(或いは $\frac{L}{C} < R^2$)

$$Z = \left(\frac{L}{C}\right) \frac{1}{R} \text{ at } \omega = \omega_r$$



- $Q \equiv \frac{Im[Z]}{Re[Z]}$ と定義し、 Q_{max} になる周波数 ω_a を求める。

($\frac{dQ}{d\omega} = 0$ となる周波数を求める。)

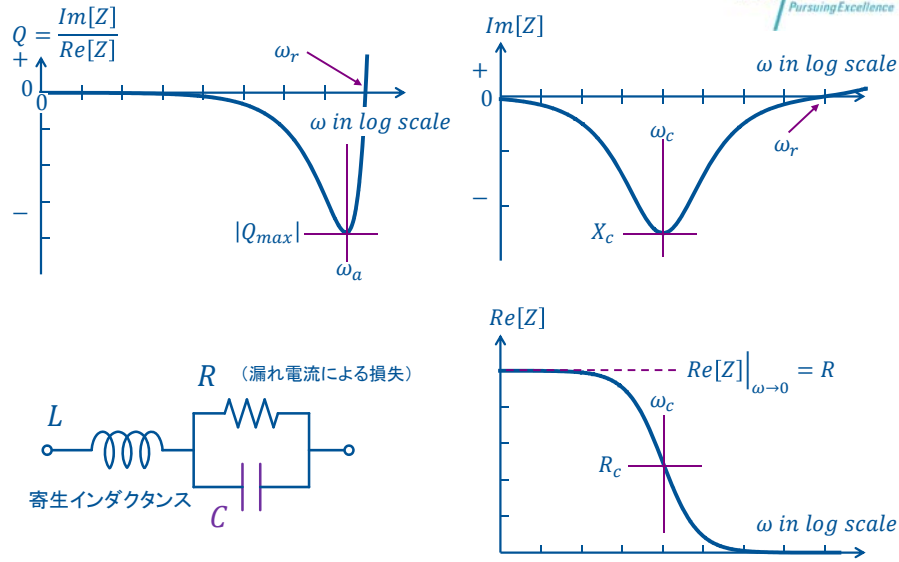
$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{CR^2}} = \frac{\omega_r}{\sqrt{3}}$$

$$Q_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} R \sqrt{\frac{C}{L}} \left(1 - \frac{L}{CR^2}\right)^{3/2}, \text{ at } \omega = \omega_a$$

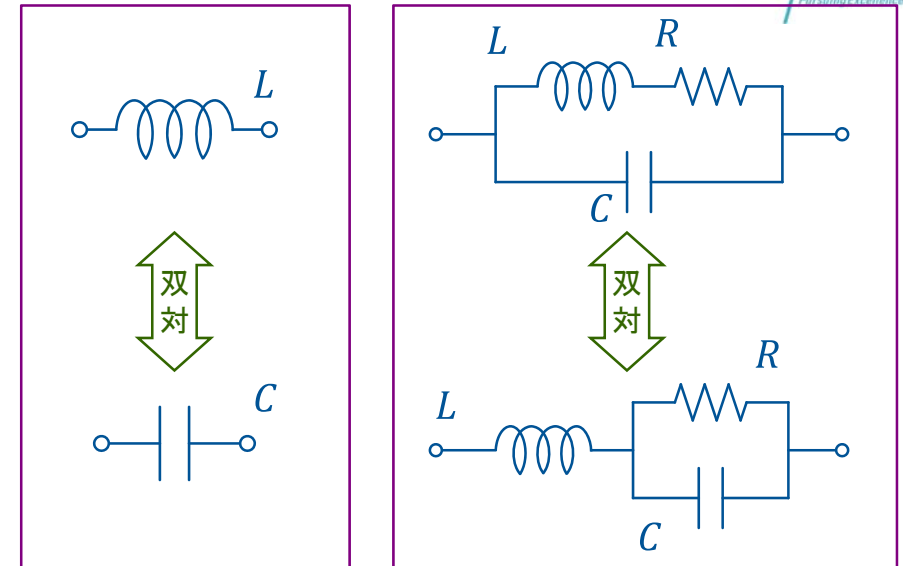
- $Im[Z]$ の極値となる周波数 ω_c を求める。($\frac{dIm[Z]}{d\omega} = 0$)

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{LC}} \left\{ \sqrt{1 + \frac{8L}{CR^2}} - \left(1 + \frac{2L}{CR^2}\right) \right\}^{1/2} \quad R_c \equiv Re[Z] \Big|_{at\omega_c} = \frac{2L}{CR} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8L}{CR^2}} - 1}$$

$$X_c \equiv Im[Z] \Big|_{at\omega_c} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(3 - \sqrt{1 + \frac{8L}{CR^2}} \right) \frac{\left\{ \sqrt{1 + \frac{8L}{CR^2}} - \left(1 + \frac{2L}{CR^2}\right) \right\}^{1/2}}{\sqrt{1 + \frac{8L}{CR^2}} - 1}$$



Kazuya Masu



Kazuya Masu

- 復習のために、線間容量をもとめる基本式を紹介しします。
- と思ったが、他のことに準備時間を割いてしまった。



Kazuya Masu

- 電磁気学の復習をしてから、線路のインダクタンスを求める。
- 求め方は、電磁気学の教科書や演習書にいてあるが、集積回路の寸法で計算してみることで、インダクタンスの大きさを感覚として理解する。

Kazuya Masu

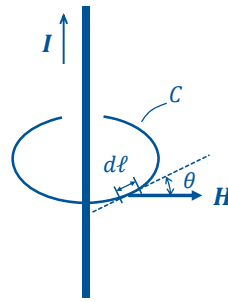
Ampere's circuital law

89

Ampereの周回積分の法則

- 任意の閉曲線 c に沿う磁界 H の周回積分は、 c と鎖交する電流 I_i の代数和に等しい。

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i$$



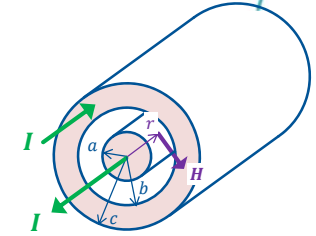
Kazuya Masu

Version 2012/10/31

Ampereの周回積分 (例題)

90

- 内導体と外導体に電流 I が逆方向に流れている。 r における磁界 H
- r の内側の電流 I_r を求めて Ampereの周回積分を利用

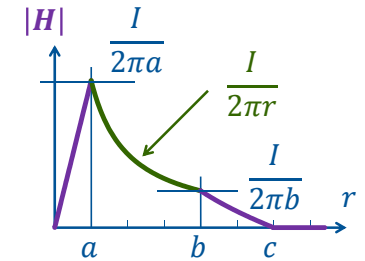


$$H = \frac{I r}{2\pi a^2} \quad \text{for } r \leq a$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{for } a \leq r \leq b$$

$$H = \frac{I (c^2 - r^2)}{2\pi r (c^2 - b^2)} \quad \text{for } b \leq r \leq c$$

$$H = 0 \quad \text{for } c \leq r$$



Kazuya Masu

Version 2012/10/31

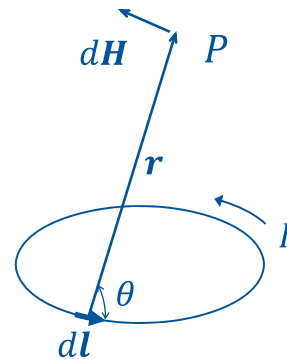
Biot-Savart's law

91

- ひとつの閉回路 C に沿って流れる電流 I によって P 点に生じる磁界強度 H

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$



Kazuya Masu

ところで、Biot-Savartの法則は如何にして導出されるのか？

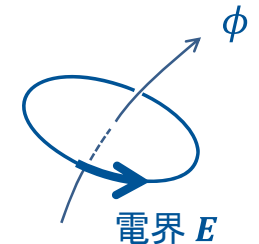
1. 理論的？
2. 実験的？

Version 2012/10/31

Faradayの電磁誘導の法則

92

- ある回路に鎖交する磁束 ϕ が時間的に変化すると、その変化を妨げる方向に逆起電力 e が発生する。
- 起電力



$$e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS = -\frac{d\phi}{dt}$$

(回路に動きがなく、磁束電界 B が変化するとき)

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

- 長さ dl の導体が速度 v で、磁束密度 B なる磁束を切断するとき誘起される起電力

$$de = (v \times B)dl$$

(磁束電界 B が変化せず、回路が動くとき)

- 磁束変化と導体運動の両方が存在するとき

$$e = -\frac{d\phi}{dt} + \int_l (v \times B)dl$$

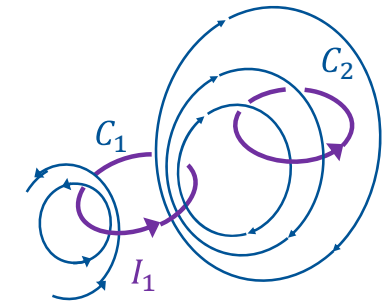
- 電流 I_1 が流れるコイル C_1 の作る磁場を Φ_1

$$\Phi_1 = L_1 I_1$$

自己インダクタンス
Self inductance

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

- 自己誘導: コイル内の電流変化により自分自身の内部に誘導起電力が生じる現象



- 相互誘導: 電流 I_1 が流れるコイル C_1 の作る磁場を Φ_1 は、コイル C_2 を貫く磁束 Φ_2 を生じせしめる

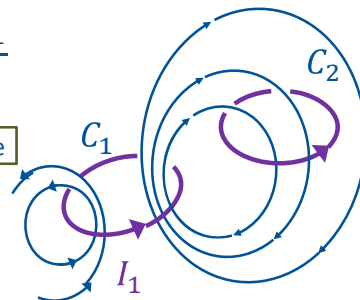
$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \quad \leftarrow \text{相互誘導}$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

相互インダクタンス mutual inductance

- 相反定理により、

$$M_{21} = M_{12}$$



- 電流 I の流れるインダクタ L に蓄えられるエネルギー

$$U_m = \frac{L I^2}{2}$$

- 磁気エネルギー密度

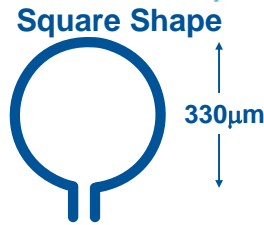
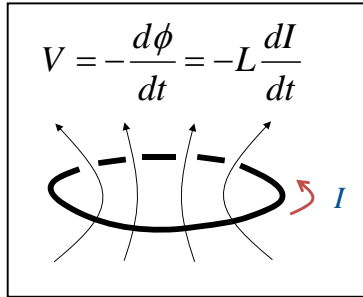
$$u_m = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{H \cdot B}{2}$$

- 電圧 E の流れる容量 C に蓄えられるエネルギー

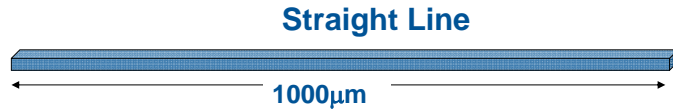
$$U_e = \frac{C V^2}{2}$$

- 電気エネルギー密度

$$u_m = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{E \cdot D}{2}$$



Which structure does have large self-inductance ?



Kazuya Masu

低周波と高周波(表皮効果が現れるとき)を区別して導出する

1. 導体内部 ($x < a$) の磁界強度

$$H = \frac{rI}{2\pi a^2}$$

2. 導体内部の磁界エネルギー U

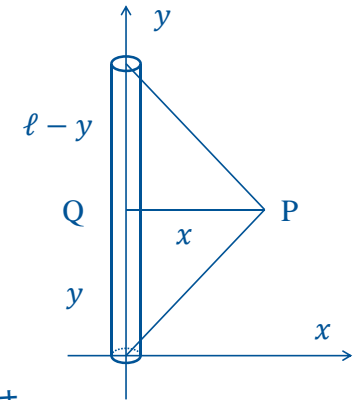
$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \mu H^2 2\pi r \ell dr$$

$$= \frac{\mu \ell I^2}{4\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu \ell I^2}{16\pi}$$

3. 導体内部の自己インダクタンス L_i は

$U = L_i^2 I^2 / 2$ より、

$$L_i = \frac{\mu \ell}{8\pi} \quad \dots (1)$$



導体半径 a
導体長さ l

Kazuya Masu

導体内部に均一に電流が流れている(低周波)場合

1. 導体内部 ($x < a$) の磁界強度

$$H = \frac{rI}{2\pi a^2}$$

2. 導体内部の磁界エネルギー U

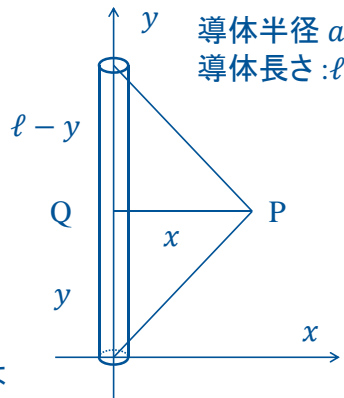
$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \mu H^2 2\pi r \ell dr$$

$$= \frac{\mu \ell I^2}{4\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu \ell I^2}{16\pi}$$

3. 導体内部の自己インダクタンス L_i は

$U = L_i^2 I^2 / 2$ より、

$$L_i = \frac{\mu \ell}{8\pi} \quad \dots (1) \quad L_i = \frac{\mu \ell}{8\pi} \quad \dots (1)$$



内部インダクタンスは
導体径に依存しない。
長さのみで決定される

Kazuya Masu

4. 導体外部 ($x > a$) のP点における磁界強度

$$H = \frac{I}{4\pi x} \left(\frac{\ell - y}{\sqrt{x^2 - (\ell - y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

5. 導線の鎖交磁束 ϕ

$$\phi = \int_0^\ell \int_0^\infty \mu_0 H dx dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\ell \left(\frac{\sqrt{x^2 - \ell^2}}{x} - 1 \right) dx$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ell \log \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} - \sqrt{a^2 + \ell^2} + a \right)$$

6. 導体外部の自己インダクタンス L_{out} は $U = L_{out} \phi$ より、

$$L_{out} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ell \log \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} - \sqrt{a^2 + \ell^2} + a \right) \quad \dots (2)$$

Kazuya Masu

7. 求める自己インダクタンス $L = L_i + L_{out}$

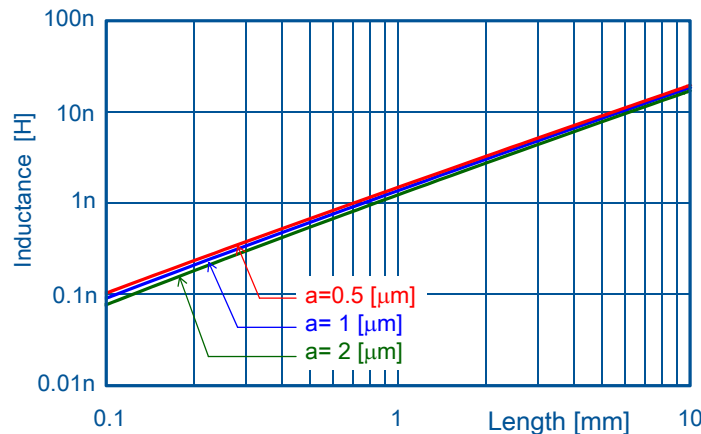
$$L = \frac{\mu\ell}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ell \log \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} - \sqrt{a^2 + \ell^2} + a \right) \dots (3)$$

8. 導線が十分に長い ($\ell \gg a$) とする。また、導体内部の比透磁率が真空の透磁率と等しい ($\mu = \mu_0$) として、

$$L \approx \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left(\log \frac{2\ell}{a} - \frac{3}{4} \right) \dots (4)$$

- この導出では、同線内での電流密度は一定であると仮定している。すなわち、直流電流を想定している。
- 電流が表皮に偏る、すなわち表皮効果が顕在化したときたときのインダクタンスはどのようになるだろうか？

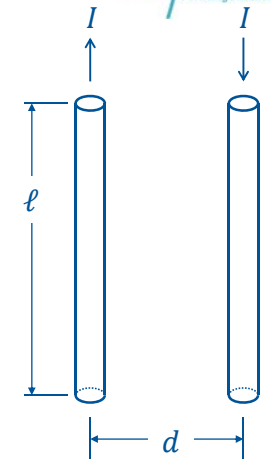
約1.4 [nH/mm]



1. 往復線路1本当たりの自己インダクタンス

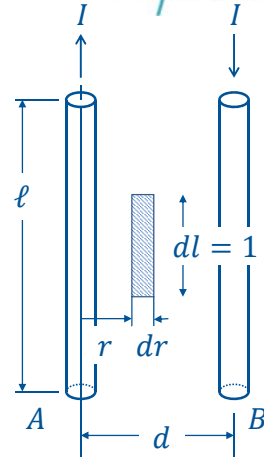
$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left(\log_e \frac{d-a}{a} + \frac{1}{4} \right)$$

$$L \approx \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left(\log_e \frac{d}{a} + \frac{1}{4} \right), d \gg a$$



導体半径 a
 導体長さ l
 導体間隔 d

- $L = L_{in} + L_{out}$
 - L_{in} : 導体内部のインダクタンス
 - L_{out} : 導体外のインダクタンス
- L_{in} はすでに導出済。
 - $L_{in} = L_{in}^{line A} + L_{in}^{line B} = 2 \times \frac{\mu \ell}{8\pi} \dots (1)$
- L_{out} は以下のように求める。
- 線間の微小面積 $ds = dr \times dl$ を鎖交する磁界を線間で積分して全鎖交磁束を求める。

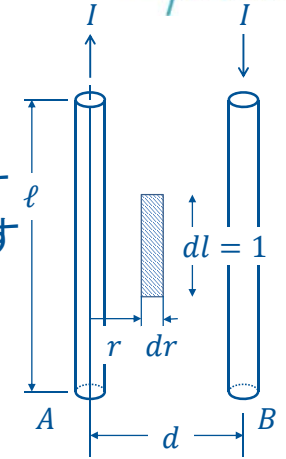


導体半径 a
導体長さ: ℓ
導体間隔: d

- $ds = dr \times dl$ を鎖交する磁界

$$H = \frac{I}{2\pi r} + \frac{I}{2\pi(d-r)} \dots (2)$$
- 単位長の微小面積 ds を鎖交する磁束 $d\phi = \mu_0 H ds$ を積分すると全磁束が求まる。

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_a^{d-a} d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{d-a} \left(\frac{I}{r} + \frac{I}{d-r} \right) dr \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \log_e \frac{d-a}{a} \dots (3) \end{aligned}$$



導体半径 a
導体長さ: ℓ
導体間隔: d

- $\Phi = L_{out} I$ より、 L_{out} が求まる。往復導線
- $L = L_{in} + L_{out}$ より、往復導線のインダクタンス(2本分の合計)は、

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \left(\log_e \frac{d-a}{a} + \frac{1}{4} \right) \dots (4)$$

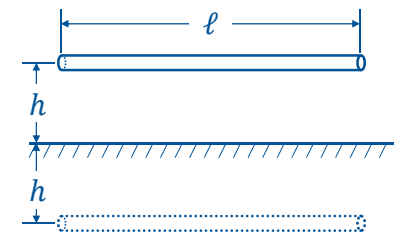
- 1本当たりの自己インダクタンスは、

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left(\log_e \frac{d-a}{a} + \frac{1}{4} \right) \dots (5)$$

- 接地面から、 h の距離にある導体の自己インダクタンス
- 接地面を完全導体とみなすと、鏡像の位置にリターン電流が流れると考えれば良い。

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left(\log_e \frac{2h-a}{a} + \frac{1}{4} \right)$$

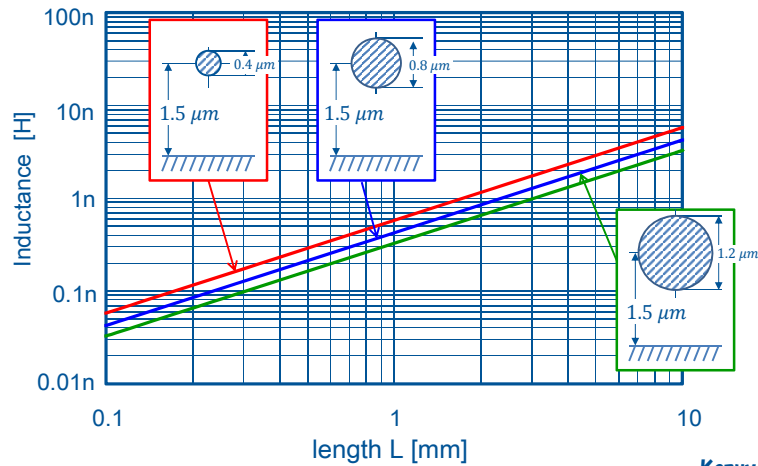
$$L \approx \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left(\log_e \frac{2h}{a} + \frac{1}{4} \right), h \gg a$$



導体半径 a
導体長さ: ℓ
接地面からの距離: h

直線導体の自己インダクタンス(接地面有)¹⁰⁹

0.3~0.6[nH/mm]

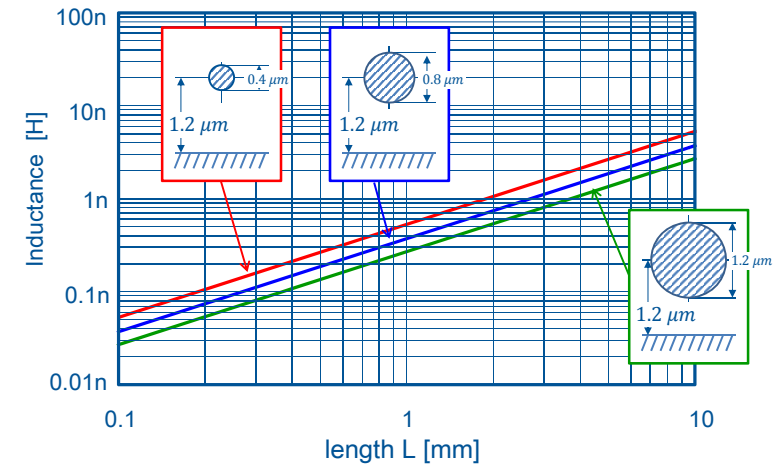


Version 2012/10/31

Kazuya Masu

直線導体の自己インダクタンス(接地面有)¹¹⁰

0.3~0.6[nH/mm]



Version 2012/10/31

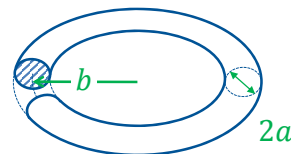
Kazuya Masu

円断面円形導線の自己インダクタンス / 111

- 断面半径 a の導体で、平均半径 b の円形コイルを構成した。($b \gg a$)

$$L = \frac{\mu_0 b}{2} \left(\log_e \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right)$$

$$L = \frac{\mu_0 R}{4\pi} \left(\log_e \frac{4R}{a\pi} - \frac{7}{4} \right)$$



導体断面半径 a
平均半径 : b

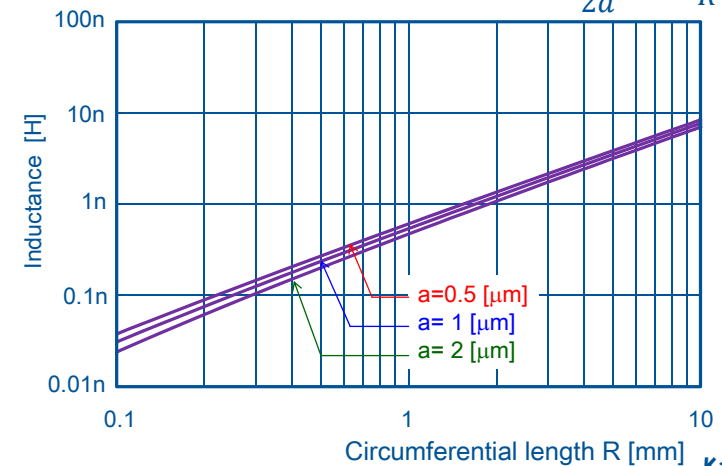
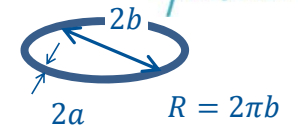
線長 : $R = 2\pi b$

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

1-turn coilの自己インダクタンス / 112

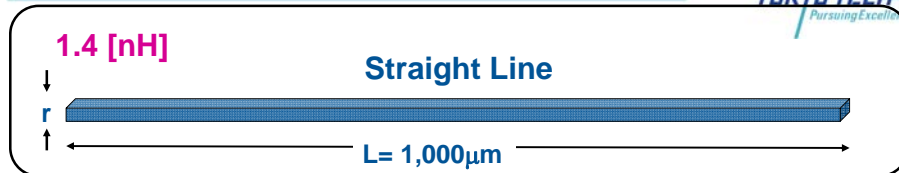
約0.5[nH] for $R=1$ [mm]



Version 2012/10/31

Kazuya Masu

- 直線導体やリングのインダクタンスは、電磁気学の演習書にもよく掲載されている問題です。
- 表皮効果が顕在化して、電流が導体表面だけを流れるようになると、内部自己インダクタンス(0.05nH/mm)分だけ、自己インダクタンスは減少します。

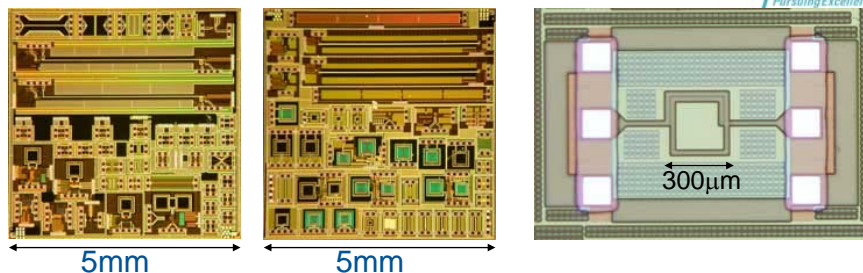


$$L \approx \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left(\log \frac{2\ell}{a} - \frac{3}{4} \right) \dots (3)$$

If the cross section of the wire is $2\mu\text{m} \times 2\mu\text{m}$,
 Wire resistance $\rightarrow 6 - 9 \Omega$
 Reactance : $|\omega L|$ @ 1[GHz] $\rightarrow 10 \Omega$

Modeling of inductance of interconnect become important....

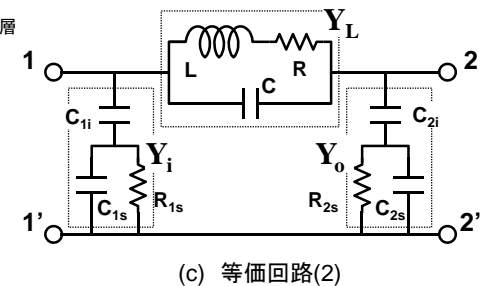
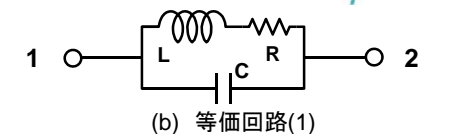
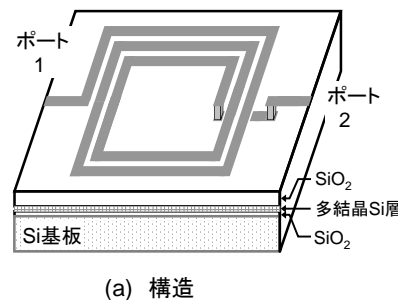
E.B. Rosa, "The Self and Mutual Inductances of Linear Conductors",
 Bulletin of the Bureau of Standards, Vol.4, No.2, 1908, Page 301ff.



直径 $100\mu\text{m} - 600\mu\text{m}$
 インダクタンス $0.1\text{nH} - 10\text{nH}$
 周波数 $0.5\text{GHz} - 20\text{GHz}$
 Q値 $3 - 15$

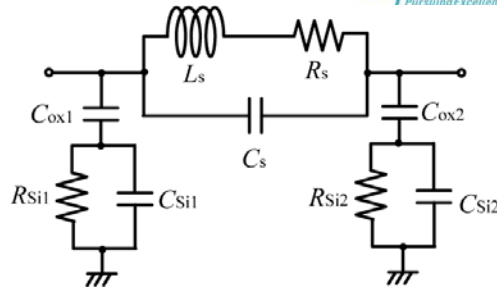
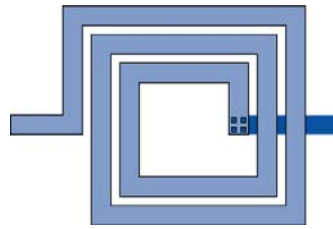
キャパシタ 20 - 50程度

配線抵抗によるロス
 Si基板によるロス



スパイラルインダクタの等価回路

11
7



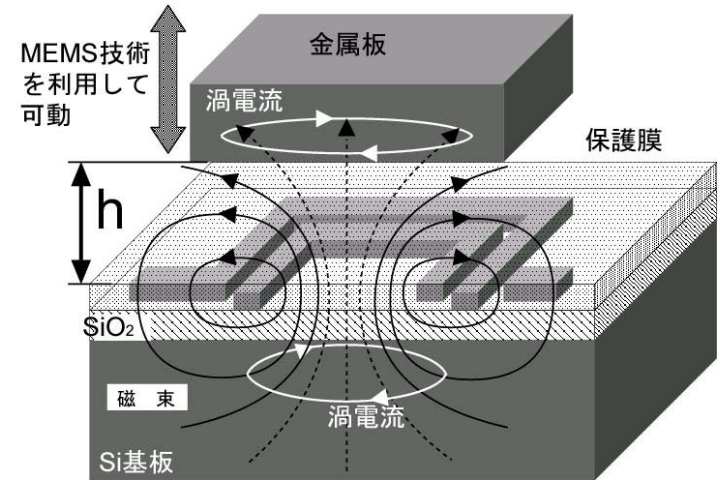
- L_s : インダクタンス-(渦電流による損失)
- R_s : 配線抵抗+(基板渦電流による抵抗)
- C_s : 配線間容量
- C_{ox} : 基板-配線間容量
- R_{Si} : 基板抵抗
- C_{Si} : 基板容量

物理的な根拠は薄い

Kazuya Masu

スパイラルインダクタの等価回路

11
8

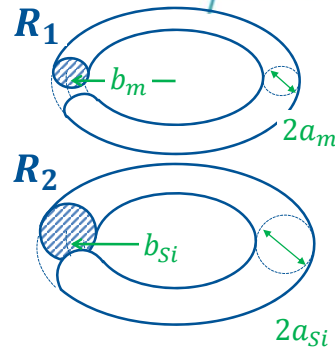


Kazuya Masu

Si基板の渦電流損失を解けるか？

119

- 金属配線により、リングインダクタ R_1 をつくる。このインダクタにより、Si基板に渦電流が流れる。
- これを何とか解析的にモデリングしたい。
- Si基板中の渦電流が流れる領域は断面 a_{Si} をもつリングと仮定する。
- リング R_1 とリング R_2 の間の相互インダクタンスは解析的に求められるはずなので、断面 a_{Si} を適当に定めることができるならば、渦電流損を上手く表現できると思われる。



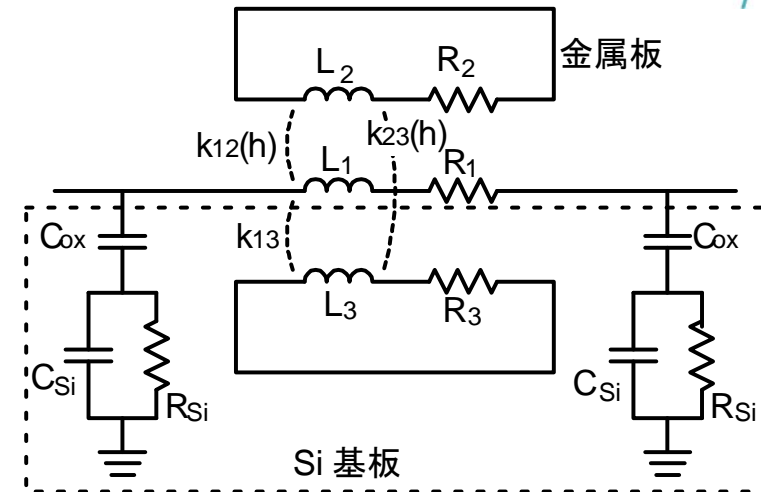
導体 断面半径: a_m
 平均半径: b_m
 Si中の渦電流 断面半径: a_{Si}
 平均半径: $b_{Si} = b_m$

線長: $R = 2\pi b$

Kazuya Masu

スパイラルインダクタの等価回路

12
0

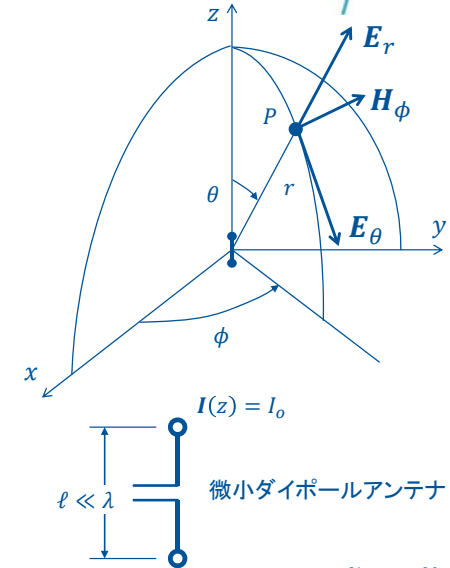


物理的には、比較的正しい。

Kazuya Masu

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
 1. 金属(細線効果、表皮効果、周波数依存性)
 2. 絶縁体(誘電損失)
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
 1. 等価回路
 2. 容量
 3. インダクタンス
5. RF回路設計に関わる事柄
 1. 電磁波とアンテナ
 2. 伝送線路
 3. インピーダンスマッチング

- 微小ダイポール
 - 波長より十分長さが短い $\ell \ll \lambda$
 - 角周波数 ω の電流 $\vec{I} = I_0 \vec{i}_x$ が一様に流れる
- P点における電界 $E = [E_r, E_\theta, E_\phi]$ 、磁界 $H = [H_r, H_\theta, H_\phi]$ は次のように求められる。



$$k = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$E_r = j \frac{120\pi \ell I_0}{\lambda} e^{-jkr} \left\{ \frac{1}{jkr^2} + \frac{1}{(jk)^2 r^3} \right\} \cos \theta$$

静電界

$$E_\theta = j \frac{60\pi \ell I_0}{\lambda} e^{-jkr} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2} + \frac{1}{(jk)^2 r^3} \right\} \sin \theta$$

放射界 誘導電磁界

$$H_\phi = j \frac{\ell I_0}{2\lambda} e^{-jkr} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2} \right\} \sin \theta$$

遠方の届くのは、放射界

$$E_\phi = 0 \quad H_r = H_\theta = 0$$

$$E_\theta = j \frac{60\pi \ell I_0}{\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta \quad H_\phi = j \frac{\ell I_0}{\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta$$

- 位相項は e^{-jkr} であり、 E_θ 及び E_ϕ は、 r 方向へ $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ で伝搬する進行波
- 電界 E_θ 及び磁界 H_ϕ は直交し、進行方向 (r 方向) とも直交する。
- $E_\theta/H_\phi = 120\pi = \eta_0$ (真空の固有インピーダンス) である。

r 方向へ伝搬する平面波

- ポインティングベクトル $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
 - ポインティング電力 $P = E_\theta H_\phi = \frac{E_\theta^2}{\eta_0}$
- $$P(r, \theta, \phi) = 30\pi \left(\frac{\ell I_0}{\lambda r}\right)^2 \sin^2 \theta \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

- これを全空間で積分して全放射電力を求める。

$$W_r = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= 60\pi \left(\frac{\ell I_0}{\lambda r}\right)^2 r^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 I_0^2 [W]$$

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

- 電流 I_0 が流れたときの有効電力が放射電力 W_r である。すなわち、微小ダイポールに $R_c = W_r / I_0^2$ の抵抗が存在することに相当
- R_c : 放射抵抗 (radiation resistance)

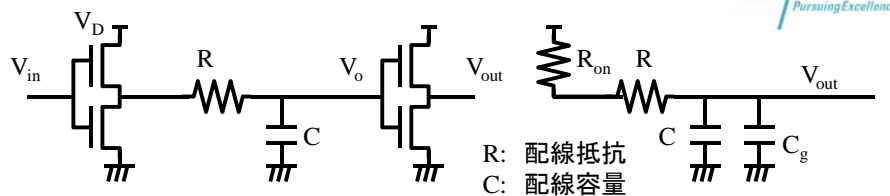
$$R_c = \frac{W_r}{I_0^2} = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 [\Omega]$$

- 半波長アンテナでは 73.13Ω 、 $\lambda/4$ アンテナでは 36.57Ω となる。
- 当日の講演では、多少詳細に述べる。折折角なので逆Lアンテナなども紹介する。つもりだったが、準備出来なかった。



.ya Masu

Version 2012/10/31

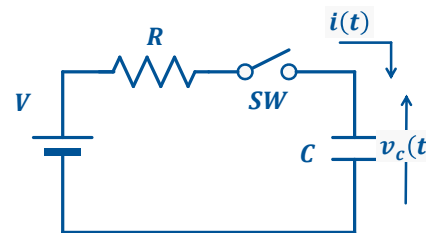


$$V_o = V_D \left\{ 1 - \exp\left(\frac{-t}{(R_{on} + R)(C + C_g)}\right) \right\}, \quad \tau = (R_{on} + R)(C + C_g)$$

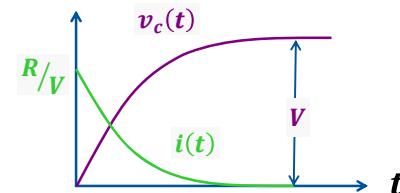
- デジタル集積回路の動作は、RC充放電で理解できる。
- ところで、次の3枚のスライドでRC回路の動作を記述しているが、仮に抵抗がゼロの極限ではどうなるか、考えて見ると面白い。抵抗ゼロの配線は存在しないと言わずに考えてみてください。

Kazuya Masu

Version 2012/10/31



- 電流、電圧は、
 - $v_c(t) = V(1 - e^{-t/RC})$
 - $i(t) = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$
- コンデンサで消費される電力、積分してエネルギー
 - $W = \int_0^\infty i(t)v_c(t)dt = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$
- 半分？



- コンデンサCに電源Vを接続したとき、コンデンサには、 $Q = CV$ の電荷が蓄えられる。
- また、電源Vのした仕事Wは、 $W = QV$ である。

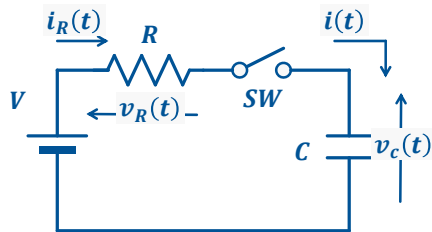
Kazuya Masu

Version 2012/10/31

RC回路の充放電[2]

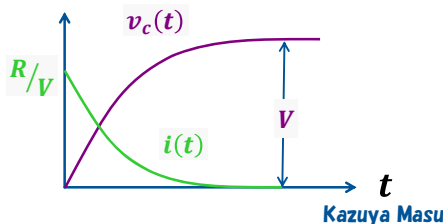
129

TOKYO TECH
Pursuing Excellence



- 電源は $W = QV$ の仕事をする。(電源から $W = QV$ のエネルギーが供給)
- 抵抗で $\frac{1}{2}CV^2 (= \frac{1}{2}QV)$ が消費(ジュール熱)され、コンデンサに $\frac{1}{2}CV^2 (= \frac{1}{2}QV)$ のエネルギーが蓄積される。

- 抵抗の電流、電圧は、
 - $v_R(t) = V - v_C(t) = V e^{-t/RC}$
 - $i_R(t) = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$
- 抵抗で消費されるエネルギー
 - $W = \int_0^{\infty} i(t)v_R(t)dt = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$



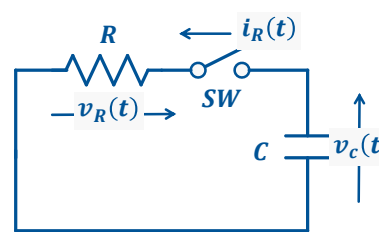
Kazuya Masu

Version 2012/10/31

RC回路の充放電[3]

130

TOKYO TECH
Pursuing Excellence



- 電流、電圧は、
 - $v_R(t) = \frac{Q}{C} e^{-t/RC}$
 - $i_R(t) = \frac{Q}{CR} e^{-t/RC}$
- 抵抗で、 $W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$ のエネルギーが消費される。
- 要は、コンデンサCが充放電すると、電源から供給されたエネルギー“ QV ”は、充電時に半分ジュール熱として失われ、放電時に残りの半分をジュール熱として失う。
- また、電源Vのした仕事Wは、 $W = QV$ である。

Kazuya Masu

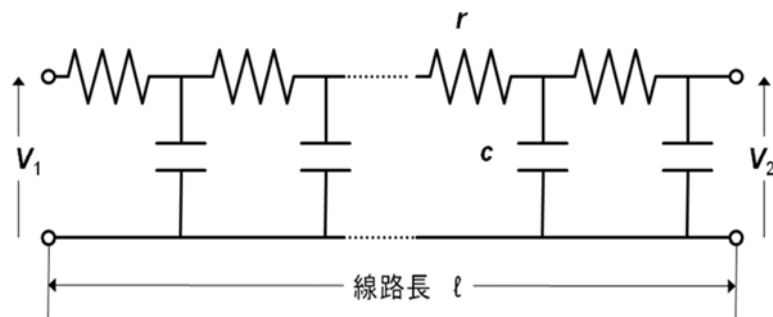
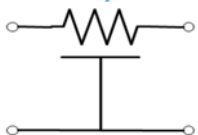
Version 2012/10/31

分布RC線路

131

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

- 分布RC線路とは、一般によく知られる分布定数回路 $L=G=0$ なる線路である。



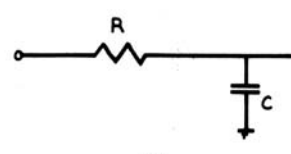
Kazuya Masu

Version 2012/10/31

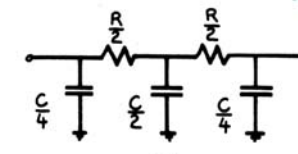
分布RC線路 (等価回路)

132

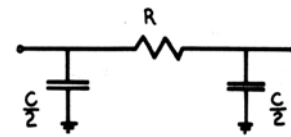
TOKYO TECH
Pursuing Excellence



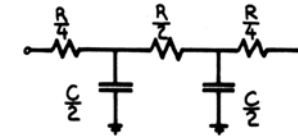
(a)



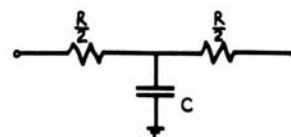
(d)



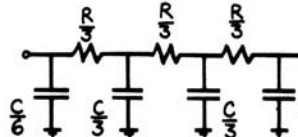
(b)



(e)



(c)



(f)

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

- 有限超の分布RC線路において、出力端に抵抗を接続していない場合、入力 V_1 に単位ステップ電圧を加えた時の任意の位置 x における電圧 V は解析的に求めることが可能である。

$$V(x, s) = \frac{\cosh\left(\sqrt{scr}(\ell - x)\right)}{s \cosh\left(\sqrt{scr} \ell\right)} V_{in} \quad (1)$$

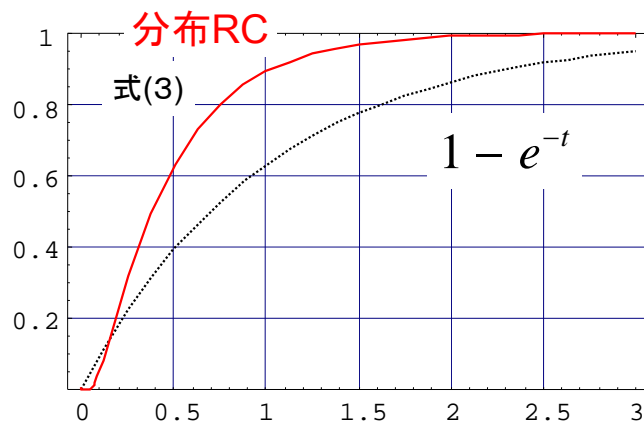
$$I(x, s) = \sqrt{\frac{C}{sR}} \frac{\sinh\left(\sqrt{scr}(\ell - x)\right)}{s \cosh\left(\sqrt{scr} \ell\right)} V_{in} \quad (2)$$

- 時間軸での解(厳密解)

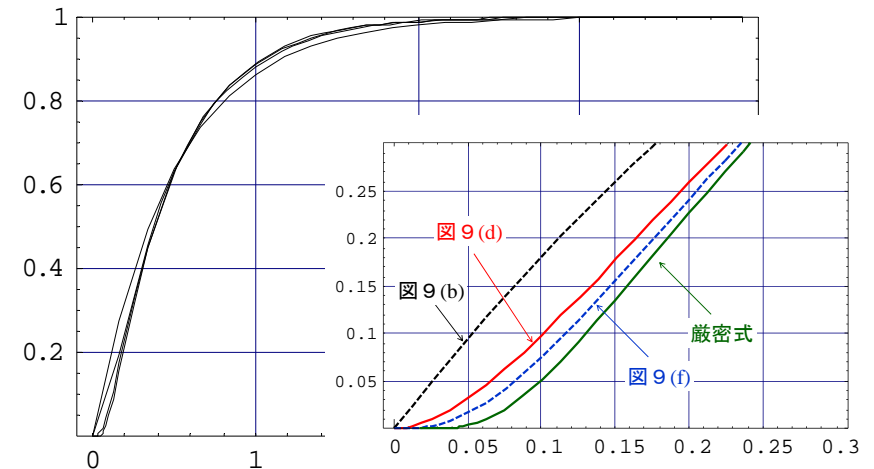
$$v(x, t) = V_{in} \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4rc\ell^2} t\right) \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2\ell} \right] \quad (3)$$

$$i(x, t) = \frac{2V_{in}}{r\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4rc\ell^2} t\right) \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2\ell} \quad (4)$$

- 90%立ち上がり時間 RC vs 2.3RC



- (b):3素子、(d):5素子、(f):7素子



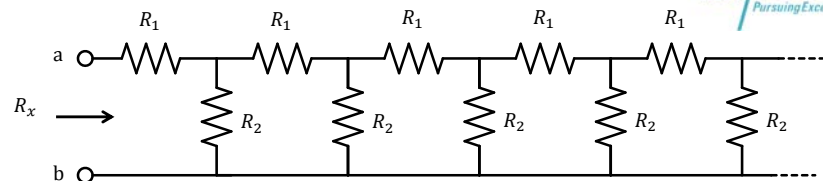


図 (a)

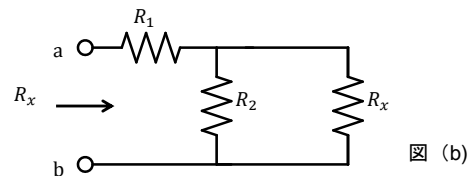


図 (b)

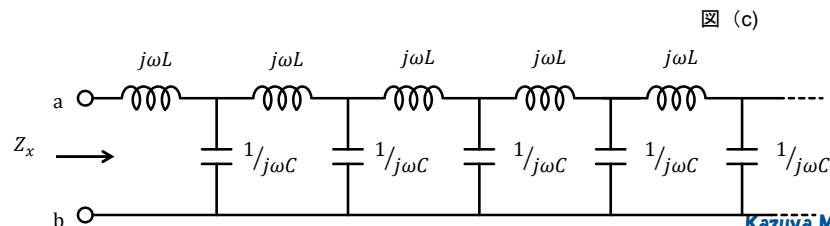


図 (c)

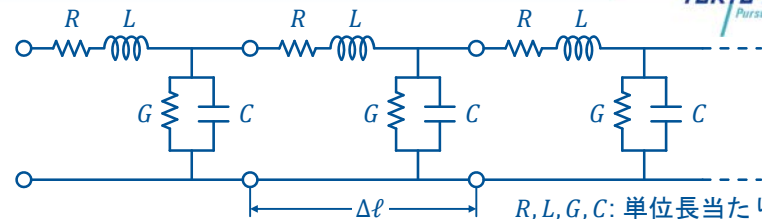
1. 図(a)が図(b)と等価であることを利用して、図(a)の抵抗 R_x を求めよ。(この問題は初歩電気回路の本)
2. 図(c)のインピーダンス Z_x を①と同様の方法で求めてみよ。
3. 図(c)の回路は、インダクタンス及び容量を単位長さあたりの値とすると無限長さ伝送線路になる。無限長さ伝送線路の場合は端子a-bから見たインピーダンスは線路の特性インピーダンス $\sqrt{L/C}$ になるはずである。上記②の結果において、どのような仮定をおくと、a-bから見たインピーダンスが $Z = \sqrt{L/C}$ と抵抗成分だけになるかを論ぜよ。この仮定は線路が無限長であることと矛盾するか、しないか論ぜよ。

- 図1(a)の抵抗は

$$R_x = R_1 + \frac{R_2 R_x}{R_2 + R_x} \text{ より、}$$

$$R_x = \frac{1}{2} \left(R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2} \right)$$

- $R_1 \rightarrow j\omega L, R_2 \rightarrow 1/j\omega C$ と置き換えれば良いはずである。



線路方程式

R, L, G, C : 単位長当たりの値

$$\begin{cases} -\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + RI(z, t) \\ -\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} + GV(z, t) \end{cases}$$

$V(z, t) = V(z)e^{j\omega t}$ とおく。定常状態の線路方程式

波動方程式(線路) $\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 V(z)$ $\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 I(z)$	伝搬定数 $\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C)$ 特性インピーダンス $Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$
--	---

波動方程式(電磁波) $\frac{\partial^2 E_{xo}(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xo}(z)$ $\frac{\partial^2 H_{yo}(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 H_{yo}(z)$	伝搬定数 $\gamma = \{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\}^{1/2}$ 特性インピーダンス $\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon + \sigma}} [\Omega]$
---	---

- 伝送線路の線路方程式は、電磁波の波動方程式と同じ表式である。
- 伝送線路(マイクロストリップラインや同軸線路)にTEM波が伝搬していると考えれば、同じ定式化ができて当たり前である。

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$$

$$V(z) = A \exp(-\gamma z) + B \exp(+\gamma z)$$

進行波のみを示すと、 $V(z) = V_o e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$

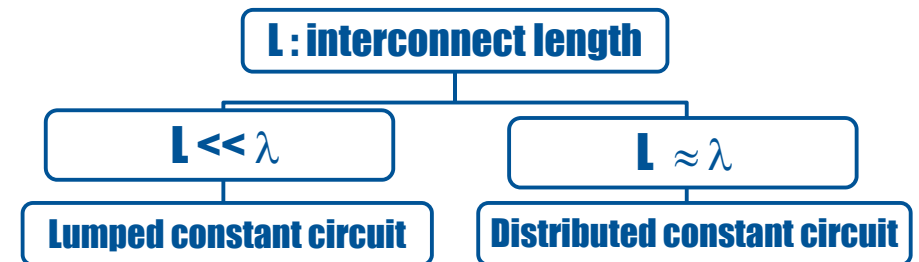
$$I(z) = \frac{V_o}{Z_o} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC)} \Rightarrow 0$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC)} \Rightarrow \omega\sqrt{LC}$$

λ : wave length of the signal
 f : signal frequency
 ϵ_r : relative dielectric constant

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c_o}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \frac{1}{f}$$



Criteria $L \gtrsim \left(\frac{1}{40} \sim \frac{1}{100} \right) \times \lambda$

Analog Circuit: l : wire length

$$l > \left(\frac{1}{100} \sim \frac{1}{40} \right) \times \lambda, \quad \lambda = \frac{c}{f}$$

PC board design

Rising time (τ_{rise}) of pulse becomes shorter than the round trip time of signal through the wire.

$$2 \times \tau_{delay} > \tau_{rise}$$

Analog Circuit

$$l > \frac{1}{40} \times \lambda$$

- Phase: 10-degree
- Reflection coefficient of signal
Ideal open/short terminal : $\Gamma = -1$ or $+1$
→ $\Gamma = -0.73$ or $+0.9$ (3dB change)

Rising time of pulse is generally 5% of the period.

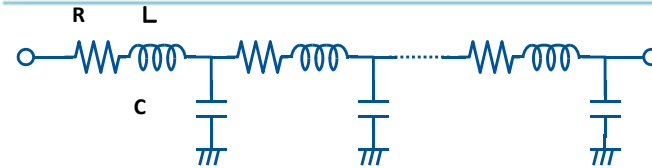
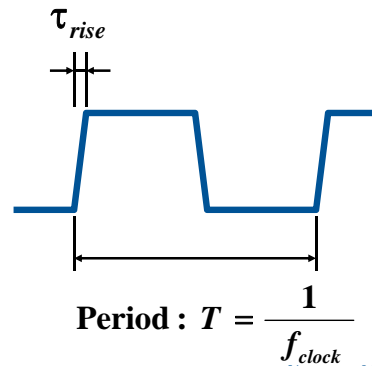
$$\tau_{rise} = 5\% \text{ of period} = \frac{T}{20} = \frac{1}{20} \frac{1}{f_{clock}}$$

$$2 \times \tau_{delay} > \tau_{rise}$$

$$2 \times \frac{l}{v} > \frac{1}{20} \frac{1}{f_{clock}}$$

$$2 \times \frac{l}{f_{clock} \lambda} > \frac{1}{20} \times \frac{1}{f_{clock}}$$

$$l > \frac{1}{40} \times \lambda$$



R,L,and C :

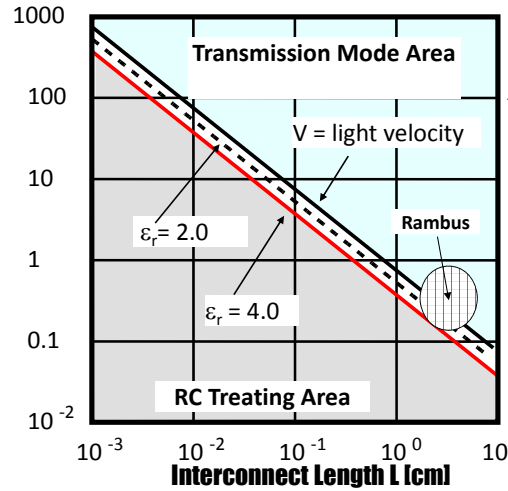
Resistance, Inductance, and capacitance per unit length

$$\omega L_T < \frac{1}{40} \times \frac{1}{\omega C_T} \sim \left(\frac{\pi}{20} \right)^2 \times \frac{1}{\omega C_T}$$

$$L_T = L \times \text{length} \quad \text{and} \quad C_T = C \times \text{length}$$

Rising time of the pulse → $\tau_{rise} = (1/20)(1/f)$
The condition that the inductance components can be neglected results in
“ The rising time is equal to (or less than) the twice of the delay time of the line.”

Critical frequency



Critical Frequency (f_c)

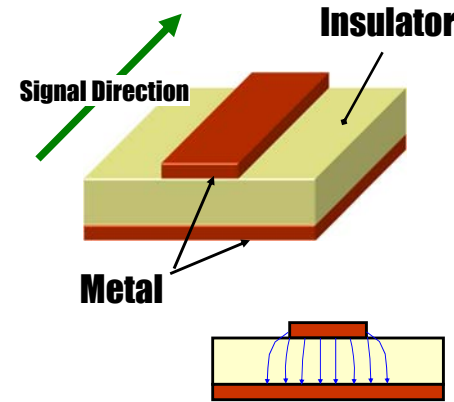
$$L = \frac{1}{40} \times \lambda = \frac{1}{40} \times \frac{1}{f_c} \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Blue area:
Transmission Line mode
Gray area
Lumped RC area

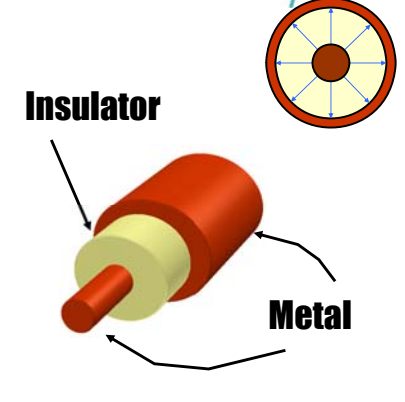
For over 1GHz signal propagation through 1cm inter-connect line, the transmission line is required. Interconnect length less than 100μm can be treated as the conventional lumped RC circuit at over several tens GHz.

Fundamental frequency of pulse: f_F
Critical Frequency: $f_c = f_F$

Possible transmission line structure



Micro-Strip Line Type



Co-Axial Cable Type

Possible transmission line

Pair Line Structure
(Differential TR line)

Our group

- 2D/3D simulation
- Fab and measure of TR line on LSI chip

Features of pair line

- No ground plain
- High endurance against common mode cross talk

Top two layers for GHz signal transmission

• To be implemented in the multi-level interconnect structure using the top two metal layers

New Structure

Characteristic Impedance

In free space

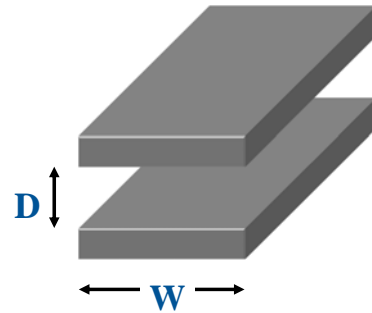
特性インピーダンス (Characteristic Impedance)

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi \approx 377 \Omega$$

Characteristic Impedance

In TR line, the impedance is given by

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} = 120\pi \frac{D}{W}$$



$D \rightarrow \infty$: Large Z_o

HOW is the Max Z_o ?

何故、50Ωか？

同軸線路を考え、損失が最も小さくなる特性インピーダンスを求める。

特性インピーダンス

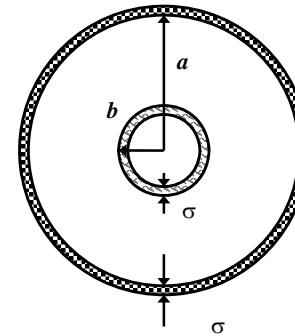
$$Z_o = \frac{(120\pi)}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

抵抗損失

$$R_{Loss} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho}{a\delta} + \frac{\rho}{b\delta} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho}{\delta} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

減衰定数

$$\alpha = \frac{R_{Loss}}{2Z_o} \propto \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$



内導体の半径: b
外導体の半径: a
表皮厚さ: σ

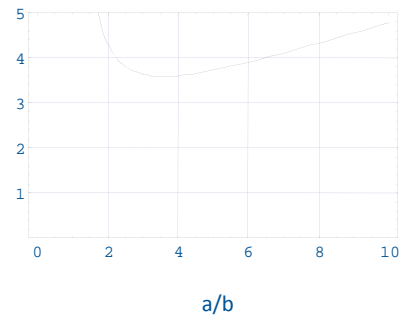
何故、50Ωか？

$$f = \frac{1}{a} \frac{\left(1 + \frac{a}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

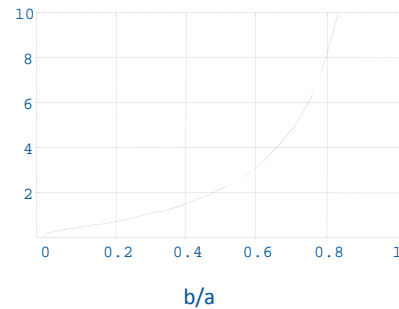
3.59112

$$g = \frac{1}{b} \frac{\left(1 + \frac{b}{a}\right)}{\ln\left(1/\frac{b}{a}\right)}$$

a が一定の条件！

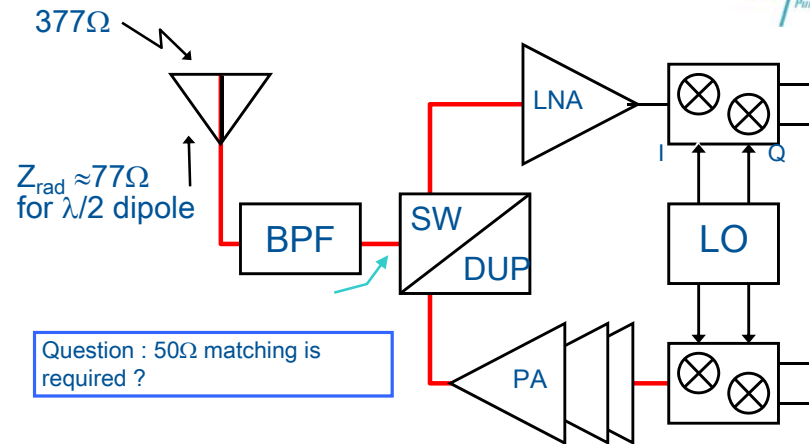


b が一定の条件！



$a/b=3.59112$ で最小

Impedance matching in RF circuit

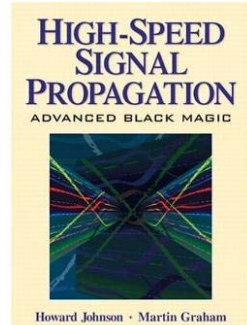
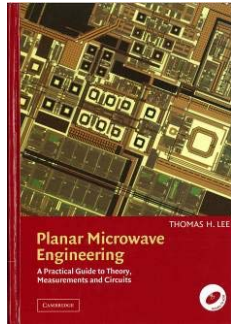


Question : 50Ω matching is required ?

- Transceiver with discrete components requires impedance matching between components.
- In one chip CMOS RF, impedance matching is not necessary.

Why 50 Ω ?

- This topic returns every several years.
- Discussions are well summarized in the books.



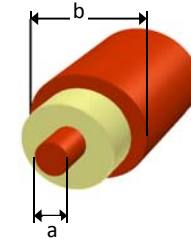
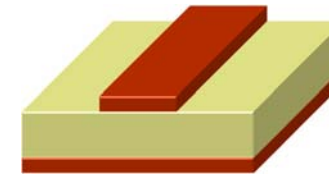
Japanese version

Planar Microwave Engineering: A Practical Guide to High Speed Signal Propagation: Advanced Black Theory, Measurement, and Circuits, by T H. Lee, Magic , by H. W. Johnson and M. Graham, 2003 2004

K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008 Kazuya Masu

Why 50 Ω ?

- In the respect of signal lines
 - Coaxial cable
 - Microstrip line



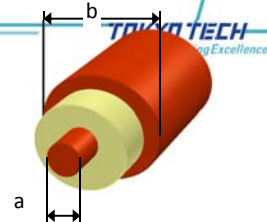
- In the respect of impedance matching to antenna

K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008 Kazuya Masu

Why 50 Ω ?

- Loss due to the skin effect

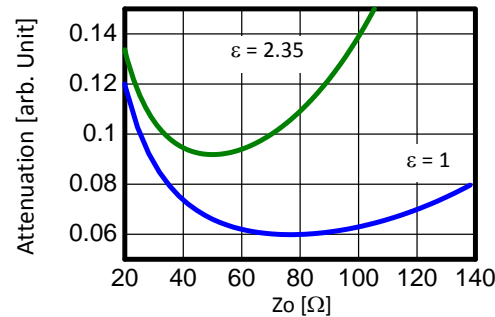
Loss minimum at $b/a \approx 3.59$
 $Z_0 \approx 77 \Omega$ for $\epsilon_r = 1$
 $Z_0 \approx 50 \Omega$ for $\epsilon_r = 2.3$



$$\alpha \propto \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{60a} \left(\frac{1+b}{a} \right) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Assumption: $b = \text{const.}$



K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008 Kazuya Masu

Why 50 Ω ?

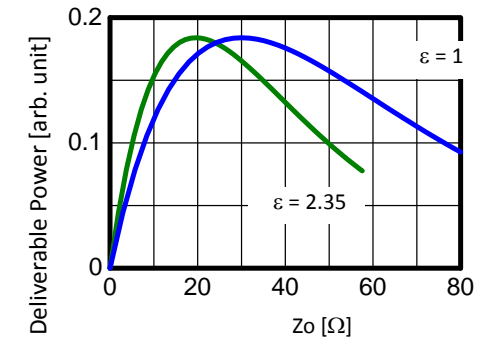
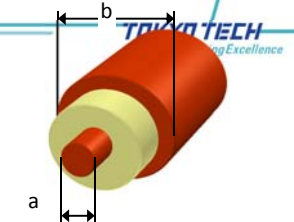
- Maximum power deliverable to a load

P_{\max} at $b/a = e^{1/2} \approx 1.65$
 $Z_0 \approx 30 \Omega$ for $\epsilon_r = 1$
 $Z_0 \approx 20 \Omega$ for $\epsilon_r = 2.3$

$$P \propto \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{60} E_{\max}^2 \left\{ a^2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right\}$$

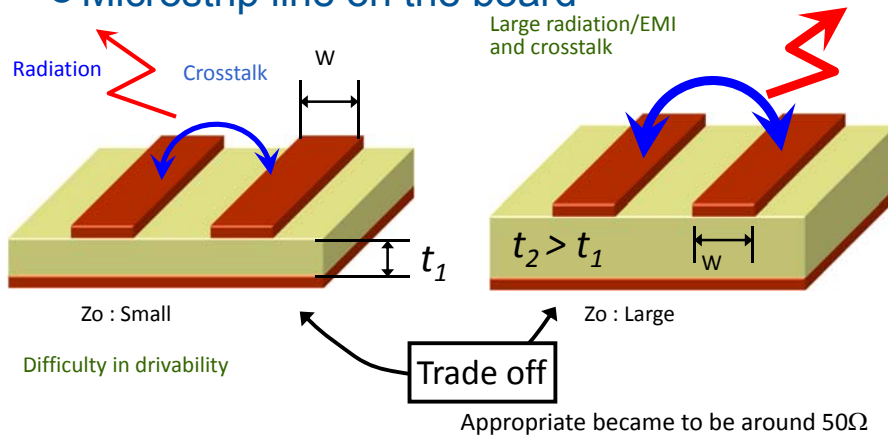
$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Assumption: $b = \text{const.}$



K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008 Kazuya Masu

● Microstrip line on the board



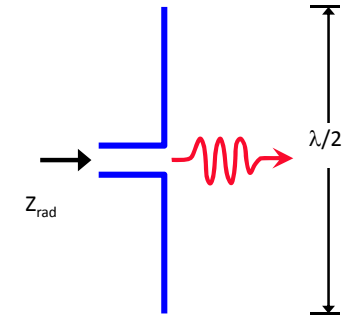
Assumption: the same metal width

K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008, Kazuya Masu

● Impedance matching to antenna

- $Z_{rad} \approx 77 \Omega$ for $\lambda/2$ dipole antenna
- $Z_{rad} \approx 33 \Omega$ for $\lambda/4$ antenna

Easy matching to antenna might be a reason why 50Ω.



K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008, Kazuya Masu

まとめ

- 集積回路設計は、電気回路論や電子回路論を基に行う。特に電気回路論は、電気磁気学を理論的バックグラウンドとしている。
- たまには頭の体操に電気磁気学を思い出し、かつ金属や誘電体の物理現象を紐解くことも重要であろう。最近はMagnetismも重要になっている。避けて通れないので、やはり頭の体操は必要であろう。
- 実際の講演では、いくつかの線路の特性インピーダンスの求めるなど、演習的要素を加える予定である。が、出来なかった。



今回、含めることが出来なかった話題(1)

電気磁気学と集積回路の観点から

1. プラズマ周波数 (ω_p)、導電率緩和時間 (τ_σ)、誘電緩和時間 (τ_d) の間に成立する下記の関係の物理的意味 (物理的必然性) が分からなかった。

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{\epsilon m} = \frac{1}{\tau_d \tau_\sigma} \quad (\text{プラズマ周波数})^2 = \frac{1}{(\text{誘電緩和時間})(\text{導電率緩和時間})}$$

2. 渦電流損失を簡単に表式化して説明できなかった。(上手い手が見つからなかった)
3. 表皮効果と表面荒さの関係の簡単な表式化が出来なかった。
4. 異常表皮効果の簡単な表式を提示出来なかった
5. 細線効果の簡単な表式とその導出を提示できなかった。

電気磁気学と集積回路の観点から

6. Slow waveにまで言及できなかった。
7. 左手系線路や左手系素子にまで言及できなかった。
8. 線路とアンテナの説明の踏み込みが甘かった。
9. 定常電流界と静電界の類似性を示し、おもしろい例題を提示できなかった。
10. Drudeの式と表皮効果を解くことに注力しすぎた感がある。伝送線路の詳細解析に至らなかった。
11. Maxwellの方程式を解くという観点で、金属の導電率と誘電率(屈折率)、誘電体の分散などを統一的に記述しようとしたが、統一的に記述するまでには至らなかった。

Maxwellの方程式を解くという観点で、金属の導電率と誘電率(屈折率)、誘電体の分散などを統一的に記述しようとしたが、統一的に記述するまでには至らなかった。

- Drudeのモデルに従って、有限の誘電率を有する物質の比誘電率は次式となる。

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \left(1 + j \frac{1}{\omega\tau}\right)} \dots (1)$$

- 電子の運動に適当な強制振動電界 ($E_{ex}(t) = E_{ex}(\omega)e^{j\omega t}$) を仮定して導出すると、

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_p^2 - \omega^2) + j \frac{1}{\omega\tau}} \dots (2)$$



- (2)式は、末松安晴「電磁気学」 p.272 に記述があるが、(1)と(2)の違いに言及できなかった。

- プラズマ周波数やDrudeの式を求める際に、電子の運動方程式を記述するときに、Lorentz力以外を考える。運動方程式は以下のとおり。

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}(r,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \mathbf{v}(r,t)}{\partial t} + \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m} \mathbf{v} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_{ext} \dots (3)$$

← ω_p^2

- (3)式の一般解は、 $\mathbf{v} = C_1 e^{+p_1 t} + C_2 e^{-p_1 t}$ であり、

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm j\omega_p \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_d}{\tau}\right)^2} \dots (4)$$

- (4)式の物理的意味の考察は？

- $\mathbf{E}_{ext} = \mathbf{E}_{ext} e^{+j\omega t}$ の強制振動を加えたとして、(3)の微分方程式の特解を求めると、(2)式になる。
- 特解が、誘電率を与えると考える根拠が不明。

- Maxwellの方程式からの要請を全て取り込んだ微分方程式を求めて、その解を求める。境界条件として要請させる条件を入れ込むことで、プラズマ周波数の説明をしたり、複素比誘電率、複素屈折率の説明ができるはずである。Maxwellの方程式の演習としては面白く、また、物理的な描像を想像するのにひとつのアプローチかと思ったが、終始一貫して解くことができなかった。



- 荷電粒子の運動方程式を

$$m \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\mathbf{v}}{\tau} \right] = -e\mathbf{E} \quad \text{ではなくて、一般的に}$$



$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial t} - \omega_0^2 \mathbf{u}(x, t) = -\frac{e}{m} \mathbf{E} e^{j\omega t}$$

- と記述し、Maxwellの方程式と適当に組み合わせれば、導体(Drude model)も誘電体の分散の式も同じように取り扱える(はずである)。
- 数学的に同じとわかれば、物性論を理解しやすはず。

(数学的には同じことをやっているのに、いろんな説明をすることで人心を惑わしている！)

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

1. 砂川重信、「理論電磁気学(第3版)」, 紀伊國屋書店(1999)
2. 砂川重信、「電磁気学演習」, 岩波書店(1982)
3. 末松安晴、「電磁気学」, 共立出版(1973)
 - 今も売っている。学生が持っていた。初学者が読むと取っつきにくいだが、分かって読んで見ると、重要なところがコンパクトに記述されている。
4. 馬場敬之、高杉 豊、「電磁気学(改訂1)」, マセマ出版
 - このシリーズは非常に有用である。予備校で有名なマセマが発行した本である。一見、記述方法は予備校の参考書のようなのであるが、中身はかなり高度である。
5. 宇田川銈久、「詳解演習 電気磁気学」, 廣川書店(昭和47年)
6. 石川静一、「改訂 電気磁気学演習」, 学献社(昭和48年・改訂11版)
7. R.P Feynman, et al., "The Feynman Lectures on Physics, II", (邦訳)「ファインマン物理学(III) 電磁気学」
 - おもしろいが、急いで読んでまとめるときには、ちょっと読みにくいかも。
8. Ali M Niknejad, "Electromagnetics for High-Speed and Digital Communication Circuits", Cambridge Univ. Press (2007)
 - 伝送線路の部分の最初のイントロは面白い。

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

8. F. W. Grover, "Inductance Calculations", Dover (1946)
 - 古い本であるが、良く利用されている。また、引用もされている。
9. H. Johnson and M. Graham, "High-Speed Signal Propagation", (邦訳)「高速信号ボードの設計(基礎編)及び(応用編)」, 丸善(平成19年)
 - 実学的な観点から書かれた本。結構役に立つ。
10. S. H. Hall and H. L. Heck, "Advanced Signal Integrity for High-Speed Digital Designs", (邦訳)「高速デジタル回路設計 アドバンスド・シグナルインテグリティ」, 丸善(平成24年)
 - 読み切っていないが、実学的。
11. Ron Schmitt, "Electromagnetics Explained-A Handbook for Wireless/RF, EMC, and High Speed Electronics" (邦訳)「LSI技術者のための親切な電磁気学」, 丸善(2002)
 - 読み物的である。
12. 電磁波及びアンテナ関係
 - 何冊か読んだが、数を読んでない、専門外ということもあり、良い参考書を紹介できるまでのレベルにはとても至っていない。

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

1. 御子柴宣夫、「半導体の物理[改訂版]」, 培風館(1991)
 - 半導体物性の入門書ではないが、Boltzmannの輸送方程式、緩和過程などを電気系大学院生でもわかるように記述している。
 - 私にとってはバイブル。といっても、自分が講義するようになってから。すばらしく良く記述されていて、自分の先生の偉さをそのときに実感。
2. 水谷宇一郎、「金属電子論(上)(下)」, 内田老鶴圃(1996)
 - 電磁波と金属の相互作用について記述あり
3. 安達健五監修、「金属の電子論(1)(2)」, アグネ(1969)
 - 物性的な内容は多いが、電磁気とはつながり薄
4. G. Burns, "Solid State Physics", 邦訳「固体の電子論」, 東海大出版会(1991年)
5. 佐藤勝昭、「物性何でもQ&A」
 - <http://home.sato-gallery.com/index.html>
 - 長年の蓄積による物性に関する基本から結構深い内容まで掲載されている。とてもまねができない。敬服。

Kazuya Masu

Version 2012/10/31

6. Carles Kittel, Introduction to Solid State Physics, 邦訳「固体物理学入門(第8版)、丸善(平成17年)
 - 物性系の人はよく読む。名著の誉れ高い本である。
7. J. M. Ziman, “Principles of the Theory of Solids, 2nd Ed.” 邦訳「固体物性論の基礎、第2版)」丸善(昭和51年)
 - 回路系の人は殆ど読まないが、名著である。私も全部読み切っていないが、ところどころ読むだけでも、良く書かれていると思う。
8. Neil. W. Ashcroft and N. David Mermin, “Solid State Physics”, 邦訳「固体物理の基礎」吉岡書店(1981年) (邦訳は「上(I)上(II)下(I)下(II)」の4冊)
 - 上(I)は金属のことが詳述されていて、面白い。
9. Hagen Rubens relationの関係ついて:
http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-58j-radiative-transfer-spring-2006/readings/chap6_solid_prop.pdf

- 今回の夏の学校での講演の機会をいただいた学振165委員会委員長平本俊郎先生に感謝いたします。本講演のとりまとめをされた橋本昌宣先生には原稿準備に手間取りご心配をおかけしました。
- 今回の講演準備については、日頃一緒に研究教育に携わっています石原 昇先生に議論にのっていただくとともに、文献の紹介もいただきました。深く感謝いたします。また、日頃何かとお教えいただいている天川修平先生に深く感謝いたします。天川修平先生の批評に耐え得る資料になったのが唯一の心配です。
- 今回多くの教科書を再度読み直しました(捲りなおし?)が、名著と呼ばれるものはやはり名著でした。