

# チップ内配線にまつわる電気磁気学

## Electromagnetism for LSI Interconnect Designers

実際の発表内容と少し異なります。ご容赦ください。

益 一哉

東京工業大学  
異種機能集積研究センター  
masu@ieee.org

<http://masu-www.pi.titech.ac.jp/~masu/index.html>

**Kazuya Masu**  
ICE Cube Center  
Tokyo Institute of Technology



## Books I read and referred for this presentation / 2



Prologue (1)

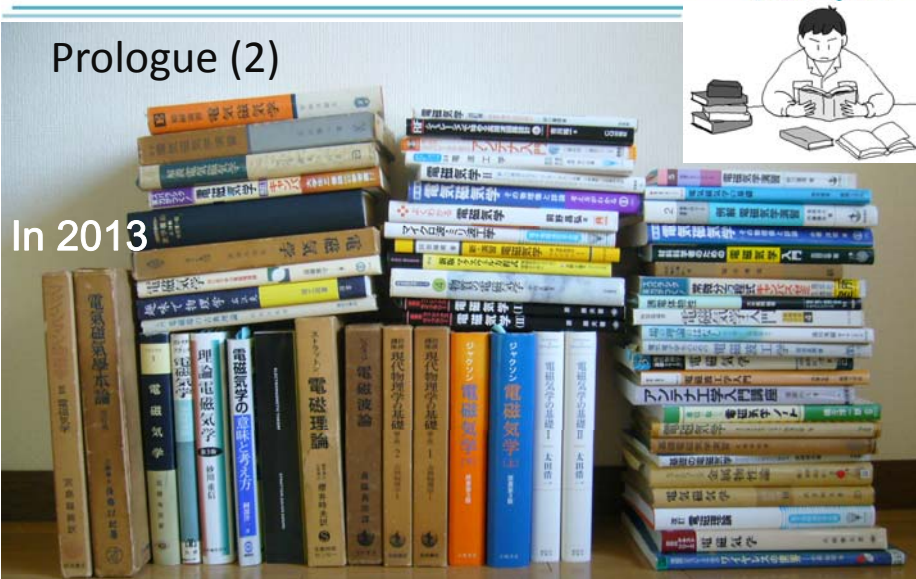
In 2012



昨年(2012年)は、とにかく手元にある本を読んでまとめた。 Kazuya Masu

## Books I read and referred for this presentation / 3

Prologue (2)



In 2013

今年(2013年)は古典と言われる本を紐解いた。結構真面目に読んだ。

## 昨年(2012年)のアンケート(1) 4



- 講義の割り当て時間
  - 長すぎる:2(1.5%) どちらかというとき長すぎる:14(10.2%) **適切:78(56.9%)** どちらかというとき短すぎる:33(24.1%) 短すぎる:10(7.3%)
- レベル:
  - 高すぎる:11(8.0%) **やや高すぎる:43(31.4%)** **適切:78(56.9%)** やや低すぎる:5(3.6%) 低すぎる:0(0.0%)
- 範囲:
  - 広すぎる:11(8.1%) **どちらかといえば広すぎる:47(34.6%)** **適切:67(49.3%)** どちらかといえば狭すぎる:8(5.9%) 狭すぎる:3(2.2%)
- 理解度:
  - 十分に理解できた:12(8.8%) **一部理解しづらいところがあったが、ほとんど理解できた:68(49.6%)** 半分くらい理解できなかった:47(34.3%) ほとんど理解できなかった:10(7.3%)

この講演内容はスクラッチで作っている部分が多いので、半分わかっただけでも構いません。Kazuya Masu

Kazuya Masu

- 概ね好評(アンケートでは、あまり悪いことは書かないからか?)
- 人によって興味を持たれるところが違うことがわかった。120分全部集中して聴いている人は少ないだろうから、当たり前だと思われる。歴史的には、電磁気学はMaxwellの方程式で大団円で迎えると書いてある。この講演での話は歴史の順番でなく、いくつかの話題を取り上げるので、部分部分だけでも理解できるようにしているつもりです。
- シミュレータも使って欲しいとの話もあった。頭に残っていたが今年もそこには辿り着かなかった。
- 式が多いというコメントがいくつかあった。ひとつの考え方ですが、私は「物理描写のみを述べても、式が伴わないと中級レベルの人は消化不良になる」との観点から、やはりは必要と考えることにした。(少なくとも昔の)東工大は式が大好きです。



1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
5. RF回路設計に関わる事柄
6. まとめ

普通の講義では飛ばすか、あるいは聴いていたとしても多くの人が覚えていない話題を取り上げたい。

Kazuya Masu

- 電気回路論は、電磁界理論をわかりやすく表現するひとつの方法である。
- 電気回路論(=集積回路設計?)を駆使するには、(避けて通ってきた、或いは避けている)電気磁気学をたまには復習した方が良さだろう。
- 特にRF系に関わる研究に携わる場合は、避けて通れないだろう。
- 電気回路論の手法は、電磁界理論を表現しただけではなく、二階の微分方程式の解を表現している「等価回路」という考え方は、異分野融合の架け橋にもなっている。例えば、昔から知られているが、機械振動は電気回路で等価回路表現可能である。電気回路論は異分野融合の切り札のひとつでもある。
- 一度は、電気磁気学を勉強したことを前提に話題提供しよう。

Kazuya Masu

- KCL Kirchhoff's current Law (KCL)
  - 電流の連続性。任意の1接続点に流入する電流の代数和はゼロである。
  - $\sum I = 0$
- KVL Kirchhoff's voltage law (KVL)
  - 電圧平衡性。同一方向にすべての起電力及び逆起電力を加えたものはゼロである。
  - $\sum V - \sum IR = 0$

- 電磁気学との関係は? (あるはずですが)
- これについては、page ~で少し触れます。

Kazuya Masu

1. 電気回路と電磁気学

2. Maxwellの方程式

1. 基本式
2. 電荷保存則、電流の種類
3. 電気回路(Kirchhoffの法則)とMaxwellの方程式
4. 波動方程式
5. 雑学: Maxwellの方程式

3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料

4. 配線モデリングに役に立つ事柄

5. RF回路設計に関わる事柄

6. まとめ

微分形		積分形
一般的	$exp(j\omega t)$ の解	
① $rot \mathbf{H} = \mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	⑤ $rot \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ アンペアの法則 ⑨
② $rot \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$	⑥ $rot \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ ファラデーの法則 ⑩
③ $div \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	⑦ $div \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum Q_i$ ガウスの法則(電界) ⑪
④ $div \mathbf{H} = 0$	⑧ $div \mathbf{H} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ガウスの法則(磁界) ⑫

微分形		積分形
一般的	$exp(j\omega t)$ の解	
① $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	⑤ $\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ アンペアの法則 ⑨
② $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$	⑥ $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ ファラデーの法則 ⑩
③ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	⑦ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum Q_i$ ガウスの法則(電界) ⑪
④ $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$	⑧ $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ガウスの法則(磁界) ⑫

1. Maxwellの方程式は微分形で記述される。
2. 一般にCartesian系の座標回転は、Eq.1で表される。

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ where } \sum_{i=1}^3 a_{ij}a_{ik} = \delta_{ik} \quad \dots (1)$$

3. Maxwellの方程式はベクトル表記であるから、座標回転によってもその式の形は変わらない。これは簡単に証明できます。これを共変性(Covariant)があると云う。
4. 共変性を持つからこそ、Maxwellの方程式はベクトルを用いて微分形記述されているとも言える。
5. もし、時間軸を含めてMaxwellの方程式を記述するとどうなるのだろう。電磁場と時間をあわせてテンソル(Tensor)で記述する必要が生じる。テンソル表記のためには、数学的手続きがややこしくなるが、テンソルでMaxwellの方程式を記述すると、Lorentz変換に対してMaxwellの方程式が共変性をもつことが、3と同じ程度の容易さをもって自明の如く証明できる。

1. 電気回路と電磁気学

2. Maxwellの方程式

1. 基本式

2. 電荷保存則、電流の種類

3. 電気回路(Kirchhoffの法則)とMaxwellの方程式

4. 波動方程式

5. 雑学: Maxwellの方程式

3. Maxwellの方程式とLSIに利用される材料

4. 配線モデリングに役に立つ事柄

5. RF回路設計に関わる事柄

6. まとめ

電荷の総量はいかなる物理的変化の過程においても、一定不変である。現在までのあらゆる実験事実がこれを支持している。

● Maxwellの方程式からも(簡単に)導かれる。

● 変位電流を含めた(Ampereの法則)。発散をとる。

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \text{div rot } \mathbf{H} &= 0 \\ \text{div} \left( \mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) &\Rightarrow \text{div } \mathbf{i}_c + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \text{div } \mathbf{E}) \\ \text{div } \mathbf{E} &= \rho / \epsilon \\ \rho & \\ \therefore \text{div } \mathbf{i}_c + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

電荷保存則

Maxwell's equations (準定常電流)

	一般のME	準定常電流が流れる場合	
①	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}_c + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}_c + \cancel{\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}$	この3式を解けば良い。
		$\mathbf{i}_c = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{ex})$ Ohm's Law	
②	$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$	$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	
③	$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0$	
④	$\text{div } \mathbf{H} = 0$	$\text{div } \mathbf{H} = 0, \text{div } \mathbf{B} = 0$	

1. 導体の中に伝導電流が流れている場合(交流理論)

2. 導体内部では、変位電流は無視できる。

3. 電場は導体内部のみ、磁場は全領域に存在する。

導体内の電流 (伝導電流>>変位電流)

$$\left| \frac{\text{変位電流}(i_d)}{\text{伝導電流}(i_c)} \right| = \left| \frac{\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}}{\sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} \right| = \left| \frac{\epsilon \omega \mathbf{E}_o(\mathbf{r}, t) e^{j\omega t}}{\sigma \mathbf{E}_o(\mathbf{r}, t) e^{j\omega t}} \right| = \left| \frac{\epsilon \omega}{\sigma} \right|$$

周期的変化

$$\omega_d \equiv \frac{\sigma}{\epsilon_o} \Bigg|_{for Cu} = \frac{1 / (1.7 \times 10^{-6} [\Omega \cdot cm])}{8.854 \times 10^{-12} [F/m]} \approx 6 \times 10^{18} \left[ \frac{1}{s} \right]$$

●  $f_d \ll 10^{18}$  [Hz] では、**伝導電流 >> 変位電流**

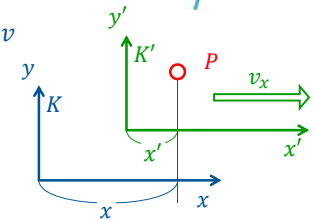
● 通常の集積回路(電気回路)を取り扱う範囲では、導体中の電流は「伝導電流」のみを取り扱えば良い。

● (考察) 半導体中では？

	電流の種類	発生原理
1	伝導電流	電界により、導体中の電荷(電子、正孔)が移動する。
2	変位電流 <sup>(1)</sup>	電束密度が時間的に変化するとき存在を仮定した電流
3	分極電流	誘電体が分極する際、電荷の移動が生じる。この場合の分極の時間変化割合を分極電流と定義する。
4	対流電流	電荷を有する物質がある速度で動いているとき、これが原因で生じる電流
5	レントゲン電流	電磁界内で誘電体が運動している場合に生ずる電流

(1) 誘電体内の変位電流は、真空内の変位電流と誘電体内の分極電流の和 **Kazuya Masu**

- 座標系  $K'$  は、座標系  $K$  に対して一定速度  $v$  で移動している。
- Galilei変換を考える:  $x' = x - vt, t = t'$
- 物理量  $F$  が  $F'(x', t') = F(x, t)$  であるとき、物理量  $F$  はスカラー量であると云う。
- 座標系  $K'$  でのMaxwellの方程式(1)が、座標系  $K$  で如何に記述されるかを考える。



$$\text{rot}' E'(x', t) + \frac{\partial B'(x', t)}{\partial t} = 0, \text{rot} H'(x', t) - \frac{\partial D'(x', t)}{\partial t} = i_e'(x', t) \quad \dots (1)$$

$$\text{div}' D'(x', t) = \rho_e'(x', t), \quad \text{div}' B'(x', t) = 0$$

5. 仮定

$$\begin{aligned} D'(x', t) &= \epsilon E', B'(x', t) = \mu H'(x', t), i_e'(x', t) = \sigma E'(x', t), \\ E'(x', t) &= E(x, t), B'(x', t) = B(x, t), \\ D'(x', t) &= D(x, t), H'(x', t) = H(x, t), \end{aligned} \quad \dots (2)$$

**Kazuya Masu**

(式の変形のための準備)

6. 物理量  $F$  はスカラー量の微分は以下のとおりである。

$$\frac{\partial F'(x', t)}{\partial x'} = \frac{\partial F(x - vt, t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial F(x - vt)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \quad \dots (2)$$

$$\text{同様に} \quad \frac{\partial F'(x', t)}{\partial y'} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial y}, \frac{\partial F'(x', t)}{\partial z'} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial z} \quad \dots (3)$$

7. 時間微分は、

$$\frac{\partial F'(x', t)}{\partial t} = \frac{dF'(x - vt, t)}{dt} = \frac{\partial F'(x - vt, t)}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial F'(x - vt, t)}{\partial t} = \frac{\partial F'(x - vt, t)}{\partial x'} (-v) + \frac{\partial F'(x - vt, t)}{\partial t} \quad \dots (4)$$

$$\text{を考慮すると、} \quad \frac{\partial F'(x', t)}{\partial t} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + v \cdot \nabla F(x, t) \quad \dots (5)$$

(5)式を「Lagrangeの微分」と云う。

**Kazuya Masu**

8. 丁寧に変形すると、以下の式を得る。(Hertzの方程式)

$$\text{rot} E(x, t) = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} + \text{rot}(v \times B(x, t)) \quad \dots (6)$$

$$\text{rot} H = \frac{\partial D(x, t)}{\partial t} - \text{rot}(v \times D(x, t)) + \{i_e(x, t) + \rho_e(x, t)v\} \quad \dots (7)$$

$\text{rot}(v \times B(x, t))$	コイルが動いているとき、コイルを貫く磁束が変化する。これにより起電力が生じる。これを表している。
$-\text{rot}(v \times D(x, t))$	電磁場の中で真電荷が運動することにより生じる一種の変位電流。これをRoentgen電流と云う。
$\rho_e(x, t)v$	真電荷が速度 $v$ で移動することにより生じる。対流電流 (Convection Current) と云う。

Newtonの運動方程式はGalilei変換のもとで共変的ではあるが、Maxwellの方程式はGalilei変換の元では共変的ではない。実は、Maxwellの方程式は光速が一定であることを受け入れる Lorentz変換の元で共変的である。「等速度運動している全ての慣性系においてすべての基本的自然法則は同じ形であらわされる」と云う「相対性原理」を受け入れるならば、光速は一定であることを認めなければならない。

**Kazuya Masu**

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
  1. 基本式
  2. 電荷保存則、電流の種類
  3. 電気回路(Kirchhoffの法則)とMaxwellの方程式
  4. 波動方程式
  5. 雑学:Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
5. RF回路設計に関わる事柄
6. まとめ

Kazuya Masu

- KCL Kirchhoff's current Law (KCL)
    - 電流の連続性。任意の1接続点に流入する電流の代数和はゼロである。
    - $\sum I = 0$
  - KCL Kirchhoff's voltage law (KCL)
    - 電圧平衡性。同一方向にすべての起電力及び逆起電力を加えたものはゼロである。
    - $\sum V - \sum IR = 0$
- 
- 電磁気学との関係は？（あるはずですが）

Kazuya Masu

## 電荷保存則とKirchhoffの法則

- KCL Kirchhoff's current law (KCL)
  - 電流の連続性。任意の1接続点に流入する電流の代数和はゼロである。
  - $\sum I = 0$
- KCL Kirchhoff's voltage law (KCL)
  - 電圧平衡性。同一方向にすべての起電力及び逆起電力を加えたものはゼロである。
  - $\sum V - \sum IR = 0$

電荷保存則を結合点に適用することで導出される。

起電力を含むOhmの法則を閉路回路に沿って積分することで導出される。

Kazuya Masu

## Kirchhoff's current law (KCL)

- 任意のループに沿って電位差を合計すると零になる。電場を  $E_K$  とすると、
 
$$\oint_C E_K \cdot dl = 0 \xrightarrow{\text{ベクトル公式}} \nabla \times E_K = 0$$
- 電場  $E$  の回転(rotation)は、一般に  $-\partial B/\partial t$  であるので零ではない。
- $E_K = E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \phi$  とすると上手くつじつまが合う。
- 「回路理論における電場はベクトルポテンシャルを含む。」と言える。また、「回路理論における電位はスカラーポテンシャル  $\phi$  そのものである」とも言える。

Kazuya Masu

- 任意の点に流れ込む電流 ( $J_K$ ) の総和が零。

$$\int_S J_K \cdot dS = 0 \longrightarrow \nabla \cdot J_K = 0$$

ベクトル公式

- 動的な場合、電流の発散(divergence)は零にならない。
- $\text{div}(\text{rot } \mathbf{B}) = 0$  であるので、

$$J_K = J + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

- 「回路理論における電流は変位電流を含む。」と言える。

岡部洋一、電磁気学の意味と考え方、講談社サイエンティフィック (2008年), p.84

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
  1. 基本式
  2. 電荷保存則、電流の種類
  3. 電気回路(Kirchhoffの法則)とMaxwellの方程式
  4. 波動方程式
  5. 雑学: Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
5. RF回路設計に関わる事柄
6. まとめ

- ①式②式のrotをとって整理すると、波動方程式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

このベクトル公式を利用する。

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

- 電波の進行方向は  $z$  方向。
  - 電界は  $E_x$  成分のみ
  - 交番電磁界  $E_x = E_{x0}(z)e^{+j\omega t}$
- とすると平面波の解が得られる。

$$\frac{\partial^2 E_{x0}(z)}{\partial z^2} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)E_{x0}(z) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E_{x0}(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{x0}(z)$$

$$\gamma = \{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\}^{1/2} = \alpha + j\beta$$

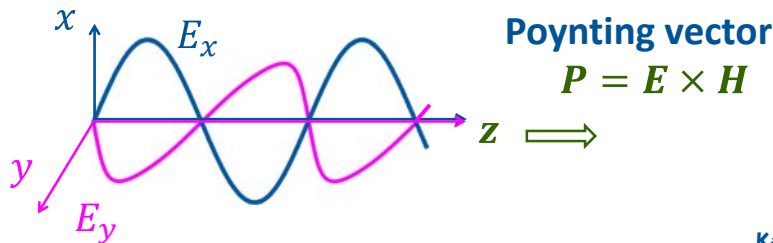


- 電界は  $E_x$  成分、磁界は  $H_y$  成分のみとなる。

$$E_{xo}(z) = Ae^{-\gamma x} + Be^{+\gamma x}$$

$$H_{yo}(z) = \frac{1}{\eta} (Ae^{-\gamma x} - Be^{+\gamma x})$$

- $\eta$  :固有インピーダンス



Kazuya Masu

- 伝搬定数

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\epsilon\mu}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} - 1 \right) \right\}^{1/2} \left[ \frac{\text{Nep}}{\text{m}} \right]$$

$$\beta = \omega \left\{ \frac{\epsilon\mu}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} + 1 \right) \right\}^{1/2} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

- 特性インピーダンス(固有インピーダンス)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}}} \quad [\Omega] \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \quad [\Omega]$$

Kazuya Masu

- $\sigma = 0$  (理想的絶縁体、真空中に相当)

- 減衰定数  $\alpha = 0$  [Nep/m]

- 位相定数  $\beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$  [rad/m]

- 位相速度  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  [m/sec]  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$

- 固有インピーダンス

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [\Omega] \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \quad [\Omega]$$

真空中

Kazuya Masu

- $\sigma \neq 0$  (損失のある媒体を伝搬するとき)

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1 \quad \text{のとき} \quad \Rightarrow \quad f \ll \frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \approx \frac{1/(2 \times 10^{-8} \Omega\text{m})}{8.8 \times 10^{-32} \text{ F/m}} \approx 10^{18} [\text{Hz}]$$

- 減衰定数  $\alpha = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$  [Nep/m]

- 位相定数  $\beta = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$  [rad/m]

- 位相速度  $v = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$  [m/sec]

- 固有インピーダンス  $\alpha = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (1 + j) \quad [\Omega]$

Kazuya Masu



## 1. 電気回路と電磁気学

## 2. Maxwellの方程式

1. 基本式
2. 電荷保存則、電流の種類
3. 電気回路(Kirchhoffの法則)とMaxwellの方程式
4. 波動方程式
5. 雑学: Maxwellの方程式

## 3. Maxwellの方程式とLSIに利用される材料

## 4. 配線モデリングに役に立つ事柄

## 5. RF回路設計に関わる事柄

## 6. まとめ



Kazuya Masu

## ● Maxwellの方程式から言えることは、まとめて見ると、

1. 電磁波なる波動が存在することを予見する。
2. 光は、Maxwellの方程式から予見される電磁波である。(正確にはそのひとつである)
3. 光の速度は一定である。

## ● ふと立ち戻ってみると、疑問が湧いてくる。

- 誰が、光がMaxwellの方程式から予見される波動だと言ったのだろう？ 或いはどうやって証明したのだろう？
- Maxwellの方程式から光速度一定が導出できるの？

Kazuya Masu

# Maxwellの方程式について



James Clerk Maxwell  
(1831年6月13日-1879年11月5日)

- James Clerk Maxwell, "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field", Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155, 459-512 (1865). (This article accompanied a December 8, 1864 presentation by Maxwell to the Royal Society.)
- <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/155/459.full.pdf+html> (ダウンロードできます)

VIII. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field.* By J. CLERK MAXWELL, F.R.S.

Received October 27,—Read December 8, 1864.

### PART I.—INTRODUCTORY.

(1) THE most obvious mechanical phenomenon in electrical and magnetical experiments is the mutual action by which bodies in certain states set each other in motion while still at a sensible distance from each other. The first step, therefore, in reducing these phenomena into scientific form, is to ascertain the magnitude and direction of the force lasu

# Maxwellは、「電磁波は光である」と主張

466 PROFESSOR CLERK MAXWELL ON THE ELECTROMAGNETIC FIELD.

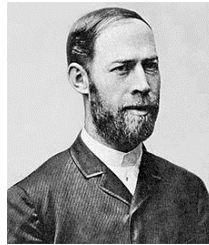
as those of WEBER, which expresses the number of electrostatic units of electricity which are contained in one electromagnetic unit.

This velocity is so nearly that of light, that it seems we have strong reason to conclude that light itself (including radiant heat, and other radiations if any) is an electromagnetic disturbance in the form of waves propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws. If so, the agreement between the elasticity of the medium as calculated from the rapid alternations of luminous vibrations, and as found by the slow processes of electrical experiments, shows how perfect and regular the elastic properties of the medium must be when not encumbered with any matter denser than air. If the same character of the elasticity is retained in dense transparent bodies, it appears that the square of the index of refraction is equal to the product of the specific dielectric capacity and the specific magnetic capacity. Conducting media are shown to absorb such radiations rapidly, and therefore to be generally opaque.

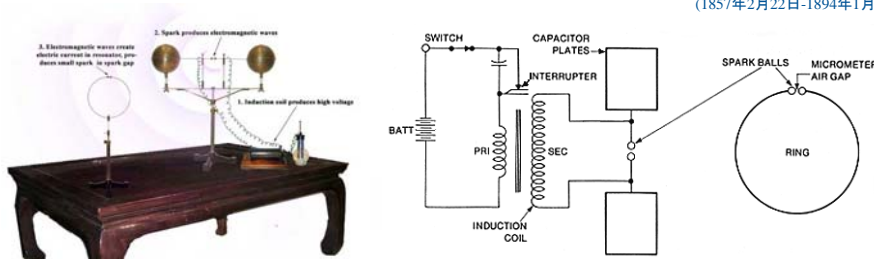
The conception of the propagation of transverse magnetic disturbances to the exclusion of normal ones is distinctly set forth by Professor FARADAY\* in his "Thoughts on Ray Vibrations." The electromagnetic theory of light, as proposed by him, is the same in substance as that which I have begun to develop in this paper, except that in 1846 there were no data to calculate the velocity of propagation.

- 電磁波の存在はHenrich Hertzにより、1886年に実験的に確かめられる。火花放電により電磁波を放出し、20m先の電気回路で検出し、かつ反射、屈折、偏極、回折すし、光と同じ速度で伝搬することを示す。YouTubeに再現実験がuploadされている。

<http://www.youtube.com/watch?v=xNTHbiKmwNQ>



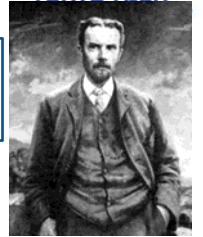
Heinrich Rudolf Hertz (1857年2月22日-1894年1月1日)



Kazuya Masu

- Original equations by Maxwell.

Heavisideが(A)~(L)を式を良く知られる下記の(1)~(4)の「Maxwellの式」にした。



Oliver Heaviside (1850年5月18日-1925年2月3日)

- (A)  $B = \nabla \times A$
- (B)  $E = v \times B - \nabla \phi - \dot{A}$
- (D)  $B = H + M$
- (E)  $C = \nabla \times H$
- (F)  $D = \epsilon E$
- (G)  $J = gE$
- (H)  $C = J + \dot{D}$
- (I)  $C = gE + \dot{D}$
- (J)  $\nabla \cdot D = \rho$
- (L)  $B = \mu H$   
 $\nabla \cdot B = 0$

- (1)  $\nabla \cdot \mu H = \rho_m$
- (2)  $\nabla \cdot \epsilon E = \rho$
- (3)  $\nabla \times H = gE + \epsilon \dot{E}$
- (4)  $\nabla \times E = -g_m H - \mu \dot{H}$

$g_m$ : 磁気伝導率  
Kazuya Masu

- Maxwellのオリジナル論文<sup>(1)</sup>や有名な著書<sup>(2)</sup>では、20の式で記述されている。このMaxwellが示した20の式は、現在我々が知るMaxwellの方程式とはかなり異なる形式で記述されている。1892年、Heaviside<sup>(3)</sup>が今我々の知るベクトル形式の式に変形した。Mxwellの20の式についての説明は文献<sup>(4)</sup>にある。
- 電磁波の存在は1886年、Hertzが実験的に確かめる。
- 「正当に評価されずに苦しみに満ちた人生を送った孤高のHeavisideと理論物理学者としても実験物理学者としても卓抜した才能を持ちながら37歳で夭折したHertzの業績をたたえて、Maxwell-Heaviside-Hertzの方程式と呼ぶべきなのだろう。」<sup>(5)</sup>

1. James Clerk Maxwell, "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field", Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155, 459-512 (1865). (This article accompanied a December 8, 1864 presentation by Maxwell to the Royal Society.) <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/155/459.full.pdf+html>
2. "A treatise on electricity and magnetism, Vol. 1 and 2", by James Clerk Maxwell. [http://openlibrary.org/books/OL7039988M/A\\_treatise\\_on\\_electricity\\_and\\_magnetism](http://openlibrary.org/books/OL7039988M/A_treatise_on_electricity_and_magnetism)
3. Oliver HEAVISIDE, "On the Forces, Stresses and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field, Philosophical Transactions of the Royal Society 183A (1892) 423 <http://www.jstor.org/>
4. André Waser, "On the Notation of MAXWELL's Field Equations", [http://www.zpenergy.com/downloads/Orig\\_maxwell\\_equations.pdf](http://www.zpenergy.com/downloads/Orig_maxwell_equations.pdf)
5. 太田浩一「電磁気学の基礎II」, p.334 の記述

Kazuya Masu

- ベクトルポテンシャルA、スカラーポテンシャルφを導入して、Maxwellの方程式を変形する。

$$E = \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \phi \quad B = \text{rot } A$$

- A及びφについて対称性の良い波動方程式へと変形される。

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A = -\mu_0 i \quad \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- これは、下記のLorentz gageの元での変形である。

$$\text{div} A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{where } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

ちょっと高級な電磁気学の教科書には、LorentzゲージとかCoulombゲージの話が出てくる。式の変形もそんなに難しくない。しかし、電気・電子工学を学ぶものにとっての有用性は意外によくわからない。



Kazuya Masu

- Maxwellの方程式は、電磁波の存在を予見する。
- 真空中であるとして、 $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A = 0$

の解である  $A(\mathbf{r}, t) = e^{(1)} a_k(t) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$

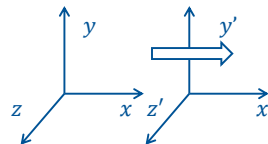
は、 $\text{div } A(\mathbf{r}, t) = 0$  を満足するために、 $e^{(1)} \cdot \mathbf{k} = 0$  であるべきことが導かれる。 $e^{(1)}$ は波動の偏りの方向を示す単位ベクトル、 $\mathbf{k}$ は波数ベクトルである。要は、波動の進行方向と波の偏りは直交、すなわち**電磁波は横波**である。

Kazuya Masu

- ところで、Maxwellは、**何を根拠に光は電磁波だ**と言ったのだろうか？
- 電気磁気的な測定から求められていた誘電率、透磁率の値を利用して、Maxwellの方程式から予測される電磁波の速度を計算すると、当時知られていた「光速」に近かった。また、光は横波であると知られていた。
- これらの事実をもって、光はMaxwellの方程式から予測される電磁波であるとした。(少なくともMaxwellはそのように主張した)
- 今に至るまでこれを否定する実験事実はない。従って、Maxwellの方程式から求まる波動に光が含まれる。

Kazuya Masu

- Newtonの運動方程式は、 $m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}$  Galilei変換の元では式が変わらない。共変的(covariant)である。
- Galilei変換  $x' = x - vt, t = t'$
- Maxwellの方程式は、Galilei変換の元で共変的ではない。(式の形が変わってしまう)。
- 一方で、Maxwellの方程式は、Lorentz変換の元で共変的である。Lorentz変換は光速度が一定であることを受け入れている。



$$x' = \frac{x - ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{1}{c} \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Kazuya Masu

1. Lorentz変換は光速度が一定であることを受け入れている。
2. 物理現象、今の場合Maxwellの方程式がLorentz変換のもとで共変的であるためには、光速度が一定でなければならないこと(すなわち、特殊相対性原理)を受け入れる必要がある。
  - Maxwellの方程式がLorentz変換の元で共変的であることを示すことは、Maxwellの方程式をベクトルの微分形で示している範囲で示してみるには結構面倒である。ただ、数学の好きな人は演習問題でやってみる価値はある。示すことができたときの達成感はあるので頑張ってみて下さい。
3. 逆に、Maxwellの方程式からLorentz変換を導くことができるならば、Maxwellの方程式から光速度一定であることを導くことができるとも云える。英文のwebなどで、この当たりのことが論じられているpageらしきものもあったが、電磁気学の教科書には明示的に論じられていない。



Kazuya Masu

## Maxwellの方程式は何を教えてくれるか(5) 45

1. ところで、そもそもMaxwellの方程式と特殊相対性理論ってどのような関係なんだろう？
2. それらは独立ではないです。下記の関係があります。
3. Maxwellの方程式を「クーロンの法則(①)」と「Biot-Savatの法則(②)」と考える。Maxwellの方程式と特殊相対性理論(③)の関係は、独立ではない3つの公理であるといえる。
  1. 例えば、①と②から、③が導出される。
  2. あるいは、①と③から、②が導出される(注1)。

注:クーロンの法則と特殊相対性理論から、Biot-Savatの法則の導出は下記に記述がある。

1. 遠藤雅守、電磁気学 はじめて学ぶ電磁場理論、森北出版(2013年)
2. <http://www.f-denshi.com/000TokiwaJPN/32denjk/000denjk.html> (電磁気学の原理(ときわ台学・理工系研究者&学生お助けサイト))

Kazuya Masu

## Maxwellの方程式は何を教えてくれるか(6) 46

- Maxwellの方程式から特殊相対性理論が導かれるはずだが、電磁気学の多くの教科書には明示的には示されていない。
- もっとも、LorentzがLorentz変換を導いた手法(1904年)がまさにMaxwellの方程式からLorentz変換を導出していることになるのだが、Lorentz自身が「光速は一定である」というところにまで辿り着いていないので、Lorentzの考え方を整理して、Maxwellの方程式から特殊相対性理論を導けるのだという説明にはなっていないようである。
- 「Maxwellの方程式から特殊相対性理論が導かれるのだ」と単純に書いている本はないかと思ったが、電気電子系の学生が紐解くことのない「相対性理論」の本には記述されているかもしれないという証左を見つけた。式の変形までキッチリと追い切れてないが確かに記述はある。  
<http://homepage2.nifty.com/eman/relativity/lorentz.html>



Kazuya Masu

## Maxwellの方程式は何を教えてくれるか(7) 47

- 相対論の本までも紐解くことになると、あまりに集積回路から離れる気もしないでもない。ということで、EMANの物理の「相対性理論」を少し紹介することで、ご勘弁いただこう。
  - EMANの物理学「相対性理論」  
<http://homepage2.nifty.com/eman/relativity/contents.html>
- 「相対論は電磁気学と力学の統一理論だ！ しかしそんなに奥は深くない。」とまで書いている。読むには丁度良いかもしれない。
- 電磁気との関係を理解するには、「ローレンツ変換の求め方」と「ローレンツ変換の別の求め方」の項を読めば十分である。
- 「ローレンツ変換の別の求め方」のところで、Maxwellの方程式が共変であるための座標変換がいとも簡単に導出されている。さらに言えば、Maxwellの方程式がLorentz変換の元で共変であることを証明するときに無理矢理な関係式を導入するのだがそれらについても明快な説明がなされている。一読と式を追うことをお勧めしたい。レベルの高いことをいとも簡単に論じている！

Kazuya Masu

## 本質に迫ってみたけど。。。 48

- ふと立ち戻ってみると、疑問が湧いてくる。
  - 誰が、光がMaxwellの方程式から予見される波動だと言ったのだろう？ 或いはどうやって証明したのだろう？
  - Maxwellの方程式から光速一定が導出できるの？
- ところで、上記の疑問が何となくわかってみると、物理って奥が深いと感じてもらえると思う。「だから、何だ？」と質問されたとき、如何に答えますか？ それがわかったとき、貴君は一流の工学者になれるだろう。



Kazuya Masu

● MKS単位系ではこれらの数値はどのように定められるのか？

1. Maxwellの方程式から、 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  である。
2. 光速  $c$  は実験的に求められる。  
 $c=2.99792458 \times 10^8$  [m/s]
3.  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  [H/m] と定める。(Maxwellの方程式から  $4\pi$  を消すことができる。)
4.  $\epsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12}$  [F/m] となる。

- $\mu_0$  と  $\epsilon_0$  があって、光速が定まるのではない事に注意。このことを明示的に記述している本が少ない。
- 今回の資料準備中に、“末松安晴,「電磁気学」共立出版 (1973), p.31” に明示的に記述があることを見つけた。流石、末松先生！ Kazuya Masu

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
  1. 金属
    - ① 抵抗率
    - ② 金属の性質の周波数特性
    - ③ 表皮効果(詳述)
  2. 絶縁体(誘電損失)
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
5. RF回路設計に関わる事柄
6. まとめ

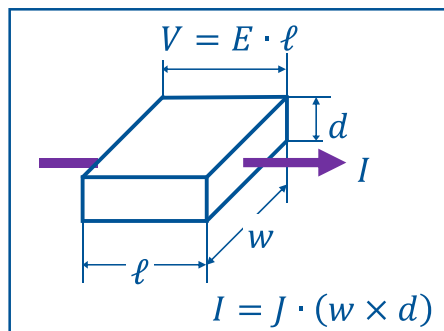
電気抵抗

		抵抗率
導体 conductor	電気を通す	$10^{-6} - 10^{-4}$ [ $\Omega\text{cm}$ ]
半導体 semiconductor	適度に電気を通す	$10^{-4} - 10^4$ [ $\Omega\text{cm}$ ]
絶縁体 insulator	電気を流さない	$10^6 - 10^{14}$ [ $\Omega\text{cm}$ ]

$J = \sigma E, \text{ or } E = \rho J$

$J$ : 電流密度 (A/cm<sup>2</sup>)  
 $E$ : 電界強度 (V/cm)

$\sigma$ : 導電率 (conductivity)  
 $\rho$ : 抵抗率 (resistivity)  
 $\rho = 1/\sigma$



配線の抵抗

- 金属の抵抗率くらいは覚えておこう。
  - Ag  $1.6 \times 10^{-6}$  [ $\Omega\text{cm}$ ] at RT
  - Cu  $1.7 \times 10^{-6}$  [ $\Omega\text{cm}$ ] at RT
  - Al  $2.7 \times 10^{-6}$  [ $\Omega\text{cm}$ ] at RT
- 講演では、緩和時間にまつわる話題について、少し紹介する。

$\sigma = e\mu n$        $\mu = \frac{e}{m} \langle \tau \rangle$

組立単位	読み	単位	他の表記	基本単位による組立
速度				m/s
加速度				m/s <sup>2</sup>
力	Newton	N	kg·m/s <sup>2</sup>	F=ma
エネルギー	Joule	J	kg·m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	J = N·m
電流	Ampere	A		
電圧	Volt	V	J/C	m <sup>2</sup> ·kg·s <sup>-3</sup> ·A <sup>-1</sup>
電力 or 仕事率	Watt	W	kg·m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup>	W = J/s
電荷	Coulomb	C	A·s	s·A
磁束	Weber	Wb	V·s	m <sup>2</sup> ·kg·s <sup>-2</sup> ·A <sup>-1</sup>
磁束密度	Tesla	T	Wb/m <sup>2</sup>	kg·s <sup>-2</sup> ·A <sup>-1</sup>
抵抗	Ohm	Ω	V/A	m <sup>2</sup> ·kg·s <sup>-3</sup> ·A <sup>-2</sup>
インダクタンス	Henry	H	Wb/A	m <sup>2</sup> ·kg·s <sup>-2</sup> ·A <sup>-2</sup>
容量	Farad	F	C/V	m <sup>-2</sup> ·kg <sup>-1</sup> ·s <sup>4</sup> ·A <sup>2</sup>

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$   $\epsilon_0 = (1/\mu_0 c_0^2) [F/m]$   $c_0$ : 光速 Kazuya Masu

Rank of Tensor		
0	Scalar	温度、比熱
1	Vector	電界、磁界
2		応力、ひずみ、誘電率、導電率
3		圧電定数、非線形光学定数
4		弾性コンプライアンス、スティフネス

M階のテンソルとn階のテンソルの関係を表すのは(m+n)階のテンソル。

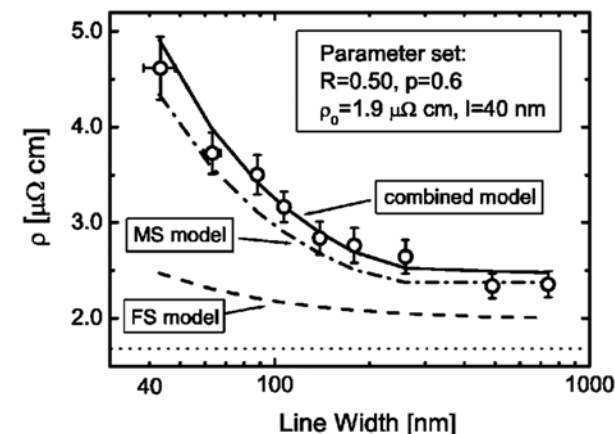
$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

1階のテンソル（電界）と1階のテンソル（電流）の関係を表す導電率は、2階のテンソルである。パラメータは9つ！

- 導電率σは、2のテンソル
  - パラメータは9つ。(一般的にはスカラーではない)
- 導電率テンソルは、一般に対称テンソル ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) ←  $P = E \cdot J = J \cdot E$  より証明可。
- 結晶の対称性を考慮すると、Siでは対角要素しか残らない 😊

立方晶系		六方晶系
<ul style="list-style-type: none"> <li>● 面心立方格子</li> <li>● 体心立方格子</li> <li>● ダイヤモンド構造</li> <li>● Zinc Blende構造</li> </ul>	$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix}$

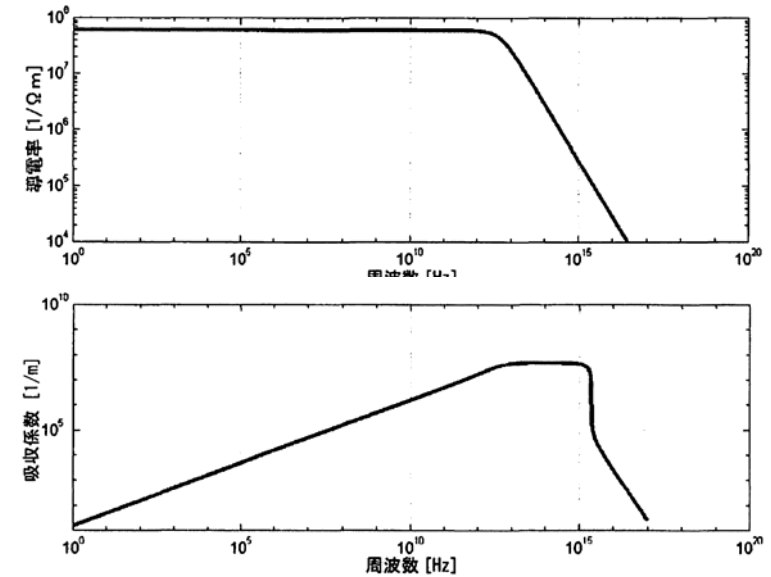
- 線幅が小さくなると抵抗率が上昇する。



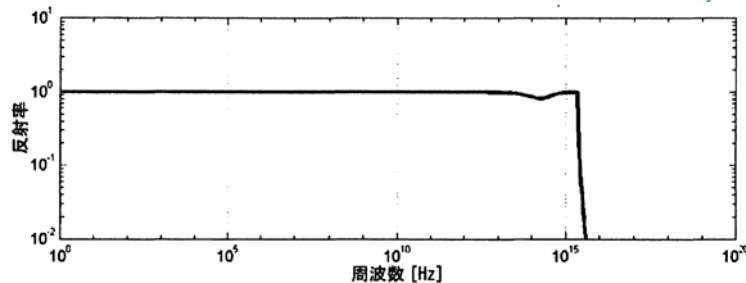
Werner Steinhogel, et al, "Size-dependent resistivity of metallic wires in the mesoscopic range", PHYSICAL REVIEW B66, 075414 (2002)

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
  1. 金属
    - ① 抵抗率
    - ② 金属の性質の周波数特性
    - ③ 表皮効果(詳述)
  2. 絶縁体(誘電損失)
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
5. RF回路設計に関わる事柄
6. まとめ

Kazuya Masu



Kazuya Masu



- 銅の電気特性の周波数依存性(計算値).
- 導電率は緩和周波数(4THz) まで一定であり、緩和周波数において減衰が開始する。
- 反射率は可視光領域までほぼ1である。
- 吸収係数は近赤外線領域まで増加し、赤外で一定となる。紫外線領域において吸収係数は急激に減少する。

Ron Schmitt, Electromagnetics Explained (LSI技術者のための親切的な電気磁気学)” Kazuya Masu

## ● 物性論的には、

### 1. Drude Model

$$\frac{m_0}{2} v_{th}^2 = \frac{3}{2} kT$$

- 電子を粒子として取り扱う。古典的分子運動論を適用。
- それでもいろいろ分かる。

### 2. Sommerfeld Model

- Fermi速度で電子は運動する。有効質量

$$\frac{m_0}{2} v_F^2 = E_F \quad E_F = 8 \sim 10 \text{ eV}$$

### 3. バンド理論、Boltzmannの輸送方程式・・・と続く

- 半導体を嚙るには、バンド理論などは多少勉強した方が良い。

### 4. 古典論、半古典論だけでも、いろいろとわかる。

Kazuya Masu

- 電子(粒子)の運動方程式

$$m_e \left[ \frac{dv}{dt} - \frac{v}{\tau} \right] = -eE$$

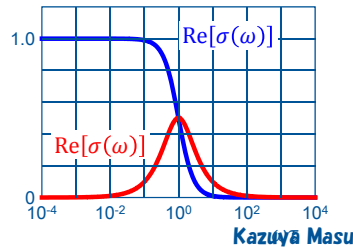
- $\frac{dv}{dt} = 0$  の定常状態。  $J = -en_e nv$ ,  $J = \sigma E$  より、

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e} \quad \text{直流導電率、}\sigma(0)\text{と記述する。}\tau\text{: 緩和時間}$$

- $E(t) = E(\omega)e^{-j\omega t}$  として、  $v(t) = v(\omega)e^{-j\omega t}$  の解を求める。

$$J(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 - j\omega\tau} E(\omega)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 + (\omega\tau)^2} + j \frac{\omega\tau \cdot \sigma(0)}{1 + (\omega\tau)^2}$$



Kazuyā Masu

- $\nabla \times H = i_c + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$  の発散をとる。

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \text{div}(\sigma E) + \text{div} \left( \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{ベクトル公式})$$

$$\sigma \text{div} E + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} E)$$

- $\text{div} E = \frac{\rho}{\epsilon}$  より、  $\frac{\sigma}{\epsilon} \rho + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$  となる。これを解いて

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_d}\right), \text{ where } \tau_d = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad \text{誘電緩和時間}$$

- 仮に、導体内部に電子が存在(密度分布が変化)しても、 $\tau_d$  の時間で拡散して、導体表面へ移動する。

と多くの本になどでは説明されてわかった気になるが、真面目に考えると難しい。

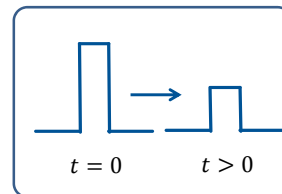
Kazuyā Masu

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \rightarrow \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{(\epsilon/\sigma)}\right)$$

- $t = 0$  で、  $Q \delta(r)$  のように電荷が存在していたとして、  $\rho(r, t)$  は一般的に解けるのだろうか？

- どうも右図のようになるらしい。

- 後藤以紀、高橋秀俊先生らの教科書
- 岡部洋一先生の本にはもう少し突っ込んだ説明有り。  $t < 0$  での電荷を集める方法を考慮したり、電場は光速で伝わることも考慮している。



- 残念ながら、咀嚼仕切れていないので今後の課題として残す。

Kazuyā Masu

- 荷電粒子の運動方程式  $m \left[ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v}{\tau} \right] = -eE \dots \textcircled{1}$

- 電荷保存の式  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} i \dots \textcircled{2}$

- Gaussの法則  $\text{div}(\epsilon E) = \rho \dots \textcircled{3}$

- ③の発散をとって変形する。

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\epsilon E) - \frac{\partial}{\partial t} \rho \right] = 0 \rightarrow \text{これより、}$$

$$\left[ \text{div} \left( \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) - \text{div} i \right] = 0 \rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{i}{\epsilon} = 0 \dots \textcircled{4}$$

Kazuyā Masu



- ④式は、 $\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{i}{\epsilon} = 0$
- ①を微分して、 $-\frac{m}{e} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} E$
- 電流  $i$  は、 $i = -en_e v$  これらを④式に代入して、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{e^2 n_e}{m \epsilon} v = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

- これは、 $v = v_o(r) \exp(-j\omega_p t)$  の解をもつ。

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{m \epsilon}}$$

- これは、プラズマ中で荷電粒子に濃度分布が存在すれば、 $\omega_p$  で振動することを示す。
- $\omega_p$  より大きな振動数の電磁波はプラズマを透過する。 Kazuya Masu

- 金属中の自由電子  $m \left[ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v}{\tau} \right] = -eE \quad \dots \textcircled{1}$
- $v = \frac{\partial u(r,t)}{\partial t}$  として、 $m \frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2} + \frac{m}{\tau} \frac{\partial u(r,t)}{\partial t} + eE = 0 \quad \dots \textcircled{2}$
- $E(t) = E_o(\omega) e^{-j\omega t}$ ,  $u(t) = u_o(\omega) e^{-j\omega t}$  の解を仮定する。

$$u_o(\omega) = \frac{e E_o}{m \omega^2 (1 + j(1/\omega\tau))}$$

- 自由電子による分極  $P$ :  $P(\omega) = -en_e u_o(\omega)$
- $D(\omega) = \epsilon_o E_o(\omega) + P(\omega)$ ,  $D(\omega) = \epsilon_r \epsilon_o E_o(\omega)$  であることから、

$$\epsilon_r = 1 - \frac{e^2 n_e}{m \epsilon_o \omega^2 \left( 1 + j \frac{1}{\omega\tau} \right)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \left( 1 + j \frac{1}{\omega\tau} \right)}$$

Kazuya Masu

- $\hat{\epsilon}_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 (1 + j\frac{1}{\omega\tau})} = \epsilon_1 + j\epsilon_2$
- 複素屈折率  $\hat{n} \equiv \sqrt{\hat{\epsilon}_r} = n + jk$
- ここで、

$\hat{\epsilon}_r$  は複素数であることを明示的に意味する。

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{m \epsilon_o}}$$

プラズマ周波数

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau}{m}$$

- $\sigma$  : 導電率
- $m$  : 電子の質量
- $n_e$  : 単位体積当たりの電子数
- $\tau$  : 導電率緩和時間

Kazuya Masu

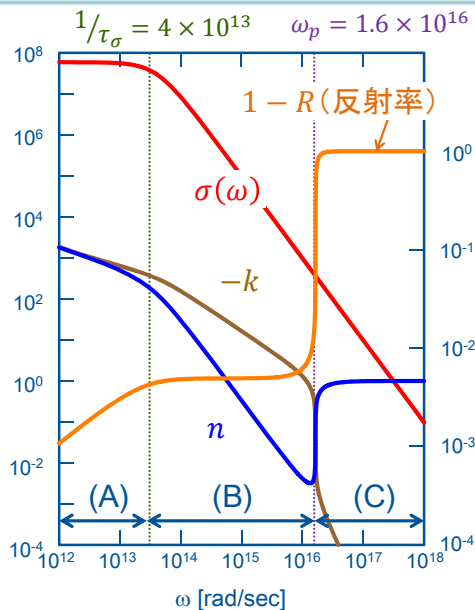
- $n^2 - k^2 = 1 - \omega_p^2 \tau^2$ ,  $2nk = \frac{\omega_p}{\omega} \omega_p \tau$  を解く。(結構嫌らしい。)

$$n = \sqrt{\frac{1}{2\omega} \sqrt{\omega\alpha + \sqrt{\tau^2 \omega_p^4 + \omega^2 \alpha^2}}} \quad \text{ここで、} \alpha = (1 - \tau^2 \omega_p^2)$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{2\omega} \left( \frac{1}{\tau \omega_p^2} \right) \sqrt{\omega\alpha + \sqrt{\tau^2 \omega_p^4 + \omega^2 \alpha^2}} \left( -\omega\alpha + \sqrt{\tau^2 \omega_p^4 + \omega^2 \alpha^2} \right)}$$

- $\omega \rightarrow 0$  のとき  $n \approx k \rightarrow \sqrt{\frac{\omega_p^2 \tau}{2\omega}}$
- これをHagen-Rubén' relation と云う。

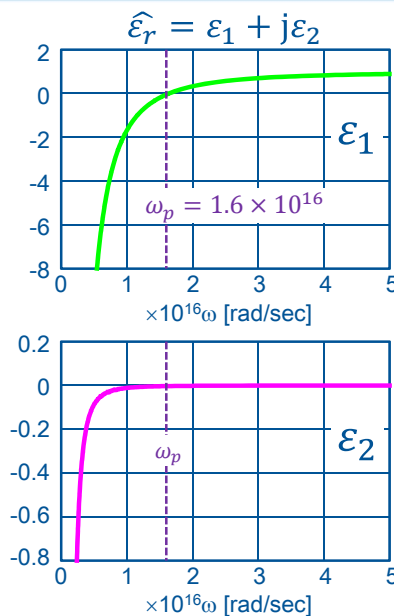
Kazuya Masu



- 領域(A):  $\omega < 1/\tau\sigma$   
 $\tau\sigma$ : 導電率緩和時間、Hagen-Rubens領域
- 領域(B):  
緩和領域:  $1/\tau\sigma < \omega < \omega_p$
- 領域(C):  $\omega_p < \omega$   
 $\omega_p$ : プラズマ周波数  
金属は透明になる。AllはDrudeのモデルに従うが、従わない金属も多い。

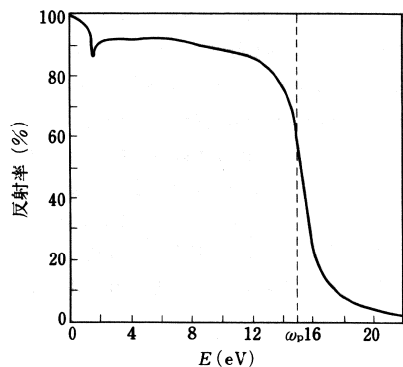
- J. M.Ziman, Principles of the theory of Solids, 2<sup>nd</sup> ed. (固体物性論の基礎)", 訳本図148を参考に計算。物性値はCu。
- 昔の本は、cgs単位系で記述されているので計算するときは注意。

Kazuya Masu

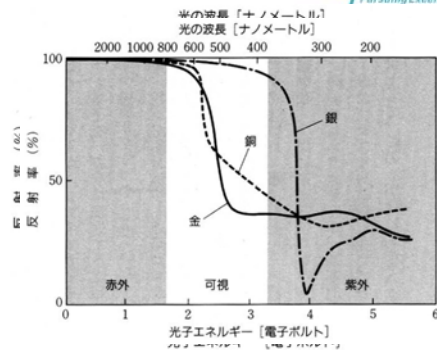


Kazuya Masu

金属の反射率の実際



- Alの反射スペクトラム。プラズマ周波数  $\omega_p$  で反射率は大きく変化する。 $\omega_p = 14.7$  [eV]



- 金、銀、銅の反射率。
- プラズマ周波数より低いエネルギー(長波長)で、反射率は変化する。

H. Ehrenreich, H.R. Philipp and B. Segall, Phys. Rev., 132 (1963), 1918. (水谷宇一郎「金属電子論(下)」内田老鶴園 (1996) p.319より引用)

[http://home.sato-gallery.com/education/kouza/metal\\_color\\_seminar.pdf](http://home.sato-gallery.com/education/kouza/metal_color_seminar.pdf)  
Kazuya Masu

プラズマ周波数、誘電緩和時間、導電緩和時間

- 金属を考えるとプラズマ周波数、誘電緩和時間、導電率緩和時間、導電緩和時間の間下記の関係がある。この関係になることの物理的必然性は何だろうか？ そもそも必然性はあるのだろうか？

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{\epsilon m} = \frac{1}{\tau_d \tau_\sigma}$$

$$(\text{プラズマ周波数})^2 = \frac{1}{(\text{誘電緩和時間})(\text{導電率緩和時間})}$$

Kazuya Masu

	単位	アルミニウム	銅	銀
原子番号		13	29	47
結晶構造		面心立方格子	面心立方格子	面心立方格子
原子量	g·mol <sup>-1</sup>	26.9815386	63.564	107.8682
格子定数	nm	0.40496	0.36147	0.4086
密度(室温)	g·cm <sup>-3</sup>	2.70	8.94	10.49
融点	°C	660.32	1084.62	961.78
抵抗率(20°C)	μΩ·cm	2.82	1.678	1.587
熱伝導率(300K)	W/m·K	237	401	429
ヤング率	GPa	70	110-128	83
単位体積当りの原子数	1/cm <sup>3</sup>	6.026×10 <sup>22</sup>	8.46988×10 <sup>22</sup>	5.85643×10 <sup>22</sup>

Avogadro constant N<sub>A</sub>=6.02214129×10<sup>22</sup> [1/mol]

Kazuya Masu

	単位	アルミニウム	銅	銀
プラズマ周波数 $f_p$	Hz	2.2×10 <sup>15</sup>	2.6×10 <sup>15</sup>	2.2×10 <sup>15</sup>
$1/f_p$	Sec	4.5×10 <sup>-16</sup>	3.8×10 <sup>-16</sup>	4.6×10 <sup>-16</sup>
誘電緩和時間 $\tau_d$	Sec	2.5×10 <sup>-19</sup>	1.5×10 <sup>-19</sup>	1.4×10 <sup>-19</sup>
$1/\tau_d$	Hz	4.0×10 <sup>18</sup>	6.7×10 <sup>18</sup>	7.1×10 <sup>18</sup>
導電率緩和時間 $\tau_\sigma$	Sec	2.1×10 <sup>-14</sup>	2.5×10 <sup>-14</sup>	3.8×10 <sup>-14</sup>
$1/\tau_\sigma$	Hz	4.8×10 <sup>13</sup>	4.0×10 <sup>13</sup>	2.6×10 <sup>13</sup>
移動度	cm <sup>2</sup> /sec	37	44	67

プラズマ周波数	$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon m}}$	導電率緩和時間	$\tau_\sigma = \frac{m \sigma}{e^2 n_e}$ $\sigma (= 1/\rho)$ : 導電率
誘電緩和時間	$\tau_d = \frac{\epsilon}{\sigma}$	移動度: $\mu$	$\mu = \frac{e}{m} \tau_\sigma$

Kazuya Masu

## Outline

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
  1. 金属
    - ① 抵抗率
    - ② 金属の性質の周波数特性
    - ③ 表皮効果(詳述)
  2. 絶縁体(誘電損失)
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
5. RF回路設計に関わる事柄
6. まとめ

Kazuya Masu

## 表皮効果

- 理想的金属(抵抗=0)の金属には、電磁界は侵入しない。しかし、有限の抵抗率をもつ金属には電磁界は侵入する。
- また、金属線に電流が流れるとき、電流は線の周囲に集中する(表皮効果)
- その厚さを「表皮厚さ」という。減衰定数の逆数となる。

Kazuya Masu

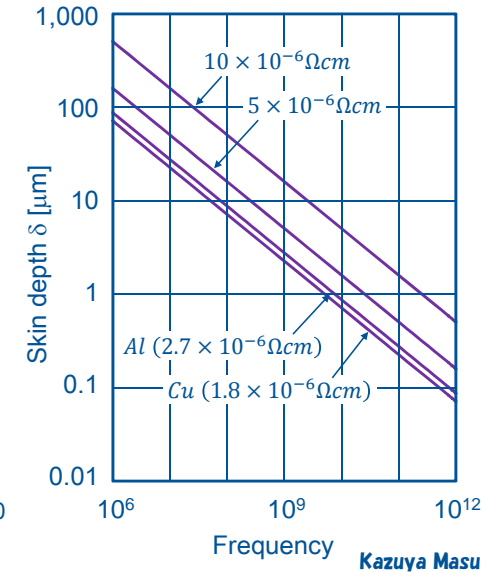
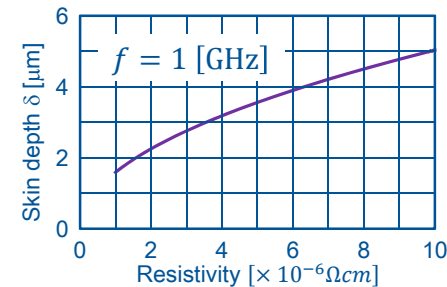
- $\sigma \neq 0$  のとき、電磁波は  $e^{-\alpha x}$  で減衰する。
- 距離 ( $\delta = 1/\alpha$ ) 進むと、振幅は  $1/e$  に減衰する。

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f\mu}} \quad \text{表皮厚さ Skin depth}$$

$\delta$ : 表皮厚さ(Skin depth)  
 $\sigma$ : 導電率       $\rho$ : 抵抗率  
 $\mu$ : 透磁率       $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$   
 $\omega$ : 角周波数     $f$ : 周波数

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f\mu}}$$

$\omega$ : 各周波数,     $f$ : 各周波数  
 $\sigma$ : 導電率,       $\rho$ : 抵抗率  
 $\mu$ : 透磁率 ( $\approx 4\pi \times 10^{-7}$ )

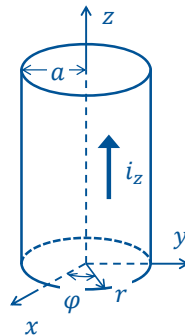


- 半径  $a$  の円筒導体に  $z$  方向のみに  $i_z$  が流れる。満たすべき Maxwell の方程式 (準定常電流に相当する)  $f_a \equiv \frac{1}{2}\pi \frac{\sigma}{\epsilon_0} \approx 10^{18} [\text{Hz}]$  以下

$$\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \text{拡散方程式と同じ形}$$

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

- $i_r(\mathbf{r}, t) = i_\phi(\mathbf{r}, t) = 0$  であり、 $i_z(\mathbf{r}, \phi, z, t)$  は  $r$  だけの関数  $i_z(r, t)$  とする。
- Ohm の法則から、 $E_r(\mathbf{r}, t) = E_\phi(\mathbf{r}, t) = 0$
- $E_z = E_z(r, t)$  のみ存在する。 $i_z(\mathbf{r}, t) = \sigma E_z(r, t)$



- 円筒座標

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$

- Laplacian

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Rotations

$$(\text{rot } \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi}$$

- $E_z(r, t)$  の満たすべき微分方程式

$$\frac{\partial^2 E_z(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z(r, t)}{\partial r} = \sigma \mu \frac{\partial E_z(r, t)}{\partial t}$$

- $E_z(r, t) = E_z(r) e^{j\omega t}$  として、定常解を求める。このとき満たすべき微分方程式は

$$\frac{d^2 E_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z(r)}{dr} + k^2 E_z(r) = 0$$

Skin depth

where  $k^2 = -j\sigma\mu\omega$

$$k = \frac{1-j}{\delta}, \text{ and } \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$$

この解は、Bessel関数

Kazuya Masu

- $E_z(r) = A J_0(kr)$  ここで、 $A$  は任意定数。
- $i_z(r) = \sigma E_z(r)$  である。円筒形全体に流れる電流を  $I$  とする。

$$\int_0^a 2\pi r i_z(r) dr = I, \text{ where } i_z(r) = \sigma A J_0(kr)$$

- $A = \frac{k I}{2\pi\sigma a J_1(ka)}$  と定めることができ、

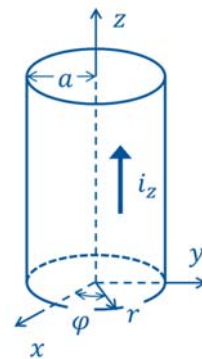
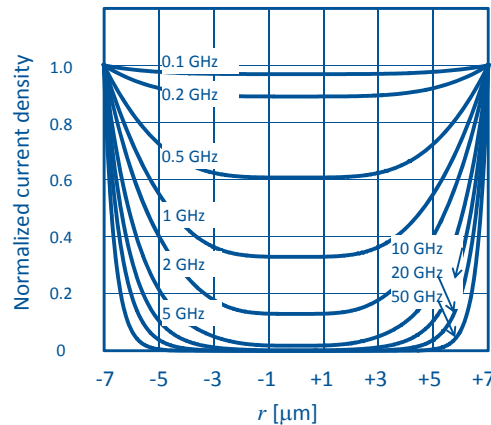
と解くことができる。

$$E_z(r) = \frac{k I}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)}$$

$$i_z(r) = \frac{k I}{2\pi a} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)}$$

砂川重信「理論電磁気学(第3版)」、(紀伊屋書店)に電流密度まで求める手順が示されている。電気磁気学の教科書にしては珍しい。

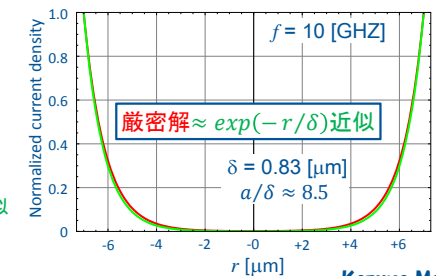
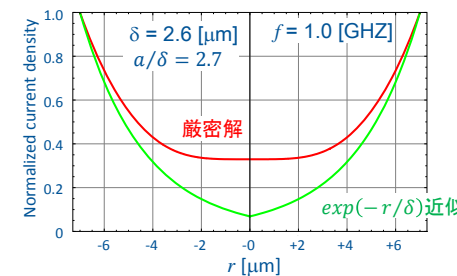
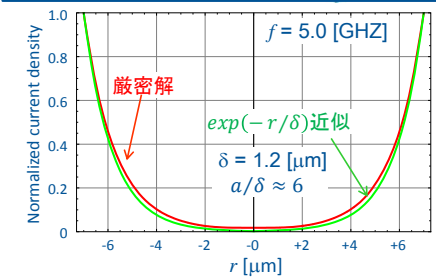
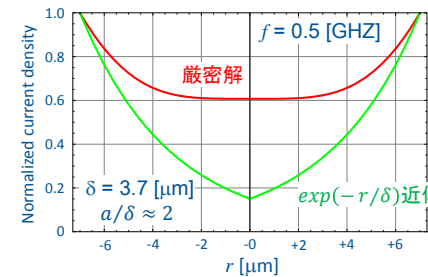
Kazuya Masu



- 金属として、Alを想定 ( $2.7 \mu\Omega\text{cm}$ )
- 表皮厚さ( $\delta$ )  
 $\delta = 2.6 \mu\text{m}$  at 1 GHz  
 $\delta = 0.83 \mu\text{m}$  at 10 GHz
- 直径 ( $2a$ ) =  $7 \mu\text{cm}$

Kazuya Masu

$a > 6\delta$  であると、分布は近似式を利用可能。



Kazuya Masu

- $E_z(r) = \frac{kI}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(kr)}{J_1(ka)}$  より、 $r = a$  における電界強度を  $z$  方向に  $0 \sim \ell$  で積分して、電圧降下  $V$  を求める。

$$V = \int_0^\ell E_z(r=a) dz = \frac{kI\ell}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}$$

- 全電流は  $I$  であるから、 $Z_{eff} = V/I$  より実効インピーダンスを求めることができる。

$$Z_{eff} = \frac{k\ell}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}$$

$$k = \frac{1-j}{\delta}, \text{ and } \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$$

$$\text{or } k = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma\mu\omega}$$

$\sigma$  : 導電率

$a$  : 導体の半径

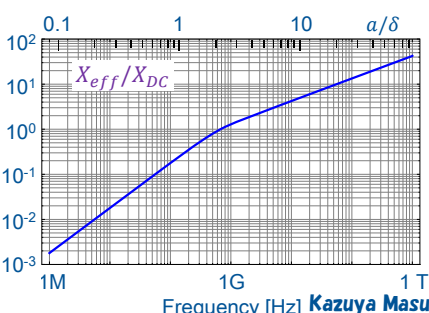
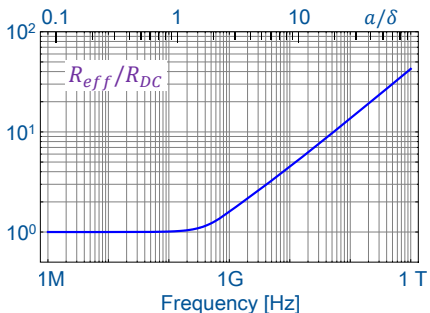
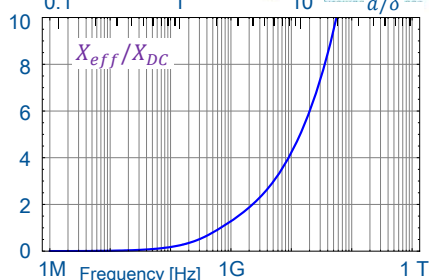
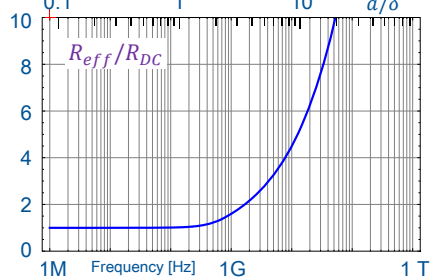
Kazuya Masu

- 伝送線路のテキストでは、 $Z_{eff} = \frac{k\ell}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}$  を Bessel関数ではなく Kelvin関数を用いて表現していることがある。

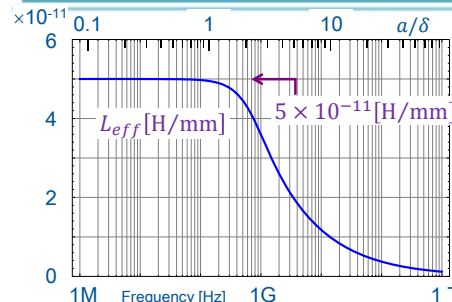
$$Z_{eff} = \frac{k\ell}{2\pi\sigma a} \frac{Ber_0(x) + jBer_0(x)}{(-1)\{Ber_1(x) + jBer_1(x)\}}$$

where  $x = \sqrt{2}a/\delta$

Kazuya Masu

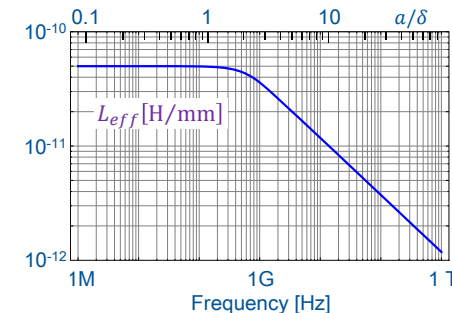


Kazuya Masu



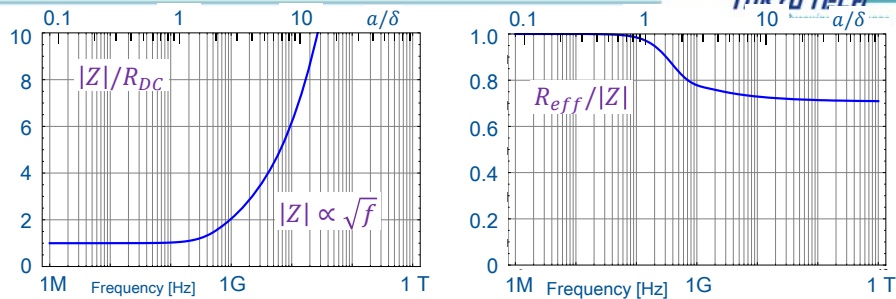
- $L_{eff}$ : 内部自己インダクタンス
- 円筒内部に均一に電流が流れているとき

$$L_{eff} = \frac{\mu}{8\pi} = 5 \times 10^{-8} \left[ \frac{H}{m} \right]$$



- 表皮効果により、電流が円筒周囲に偏ると内部磁気エネルギーはゼロになるので、内部自己インダクタンスはゼロに漸近する。

Kazuya Masu

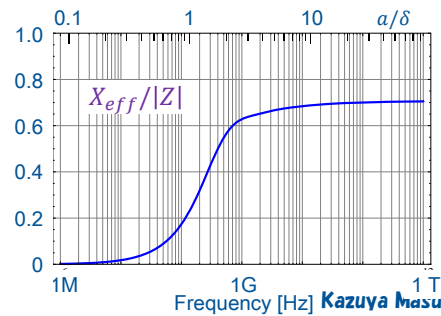


At high frequency

$$|Z| \propto \sqrt{f}$$

$$X_{eff}/R_{eff} \rightarrow 1$$

$$Z \propto (1 + j)$$



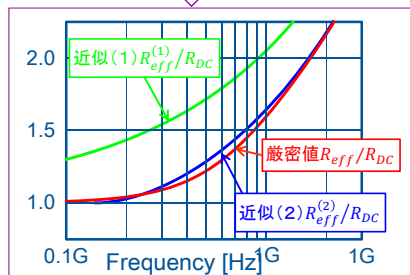
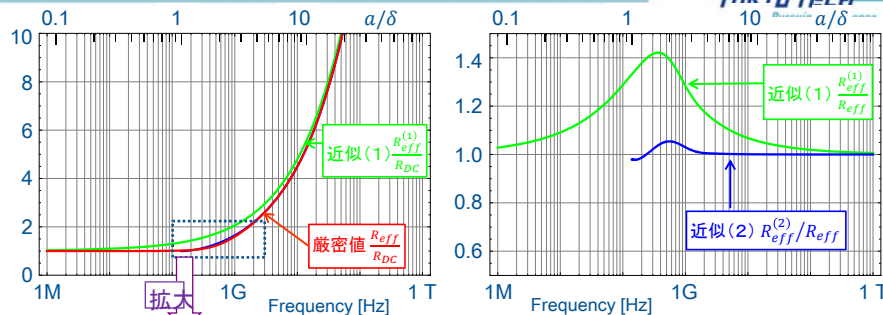
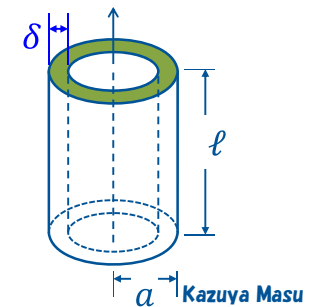
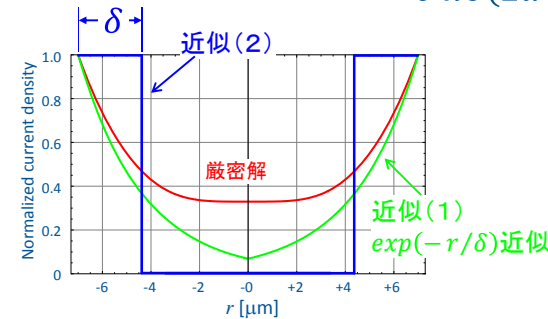
- 抵抗成分近似式を求める。適当な電流分布を仮定。

近似(1)

$$R_{eff}^{(1)} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{2\pi\delta(a - \delta + \delta e^{-a/\delta})}$$

近似(2)

$$R_{eff}^{(2)} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{\pi\delta(2a - \delta)}$$



- 表皮効果による抵抗増加分は、「近似(2)」で十分計算可能である。(誤差は最大でも5%)

- 「近似(2)」とは、表皮厚さ部分に電流が流れると仮定する単純なモデル。



## Outline

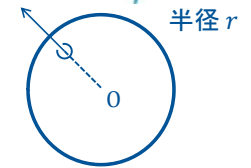
1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIに利用される材料
  1. 金属
    - ① 抵抗率
    - ② 金属の性質の周波数特性
    - ③ 表皮効果(詳述)
  2. 絶縁体(誘電損失)
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
5. RF回路設計に関わる事柄
6. まとめ

- 講義では、誘電損失について、簡単に触れようと思う。(が、間に合わなかった)



- 半径  $r$  の球の静電容量

$$C = 4\pi\epsilon_0 r$$



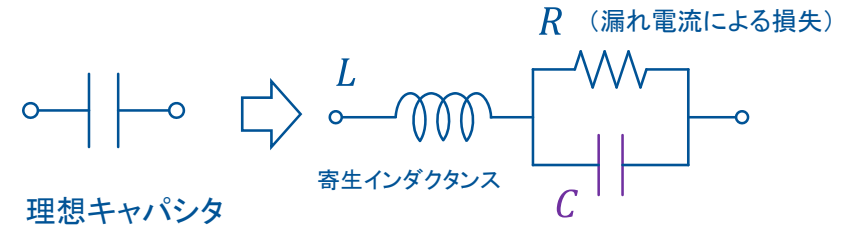
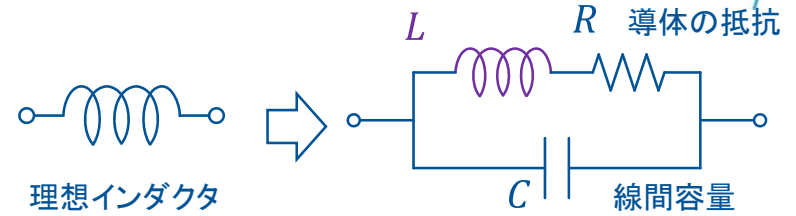
- $r = 6,400km$  (地球の半径)を代入する。
- $C = 4\pi \times 8.854 \times 10^{-12} \frac{[F]}{[m]} \times 6,400 \times 10^3[m] = 712[\mu F]$
- これを大きいとみるか？ 小さいとみるか？

材 料	絶縁性/ 耐熱性	FR グレード	対応 JIS規格	一般的な呼称 (俗称)
紙基材フェノール樹脂	一般的な絶縁性	FR-1	PP7F	紙フェノール基板
紙基材フェノール樹脂	高度な絶縁性	FR-2	PP3F	紙フェノール基板
紙基材エポキシ樹脂		FR-3	PE1F	
ガラス布基材エポキシ樹脂	一般用	FR-4	GE4F	ガラス・エポキシ基板, FR-4基板
ガラス布基材エポキシ樹脂	耐熱性	FR-5	GE2F	ガラス・エポキシ基板
ガラスマット・ポリエステル		FR-6		

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIに利用される材料
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
  1. インダクタと容量の等価回路(基本)
  2. 容量の求め方(実例)
  3. インダクタンスの求め方(実例)
  4. LSIでのインダクタンス
5. RF回路設計に関わる事柄
6. まとめ



- インダクタと容量の基本等価回路について、その周波数特性を理解しておく、オンチップインダクタのモデリングの際に有用である。



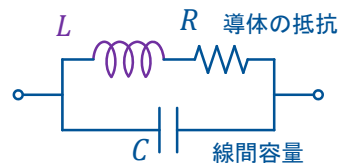
$$Z = \frac{(R + j\omega L) \times \frac{1}{j\omega C}}{(R + j\omega L) + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j\{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2\}}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}$$

- $Im[Z] = 0$  になる周波数  $\omega_r$  を求める。 $\omega_o \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$  とする。

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}} < \omega_o, \quad \text{where } 1 - \frac{CR^2}{L} > 0$$

(或いは  $\frac{L}{C} > R^2$ )

$$Z = \left(\frac{L}{C}\right) \frac{1}{R} \text{ at } \omega = \omega_r$$

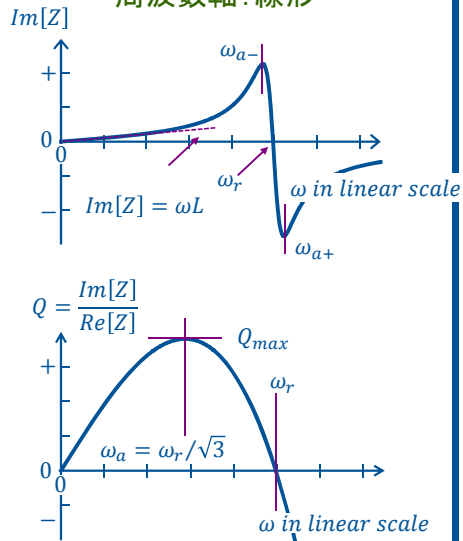


- $Q \equiv \frac{Im[Z]}{Re[Z]}$  と定義し、 $Q_{max}$  になる周波数  $\omega_a$  を求める。  
(  $\frac{dQ}{d\omega} = 0$  となる周波数を求める。)

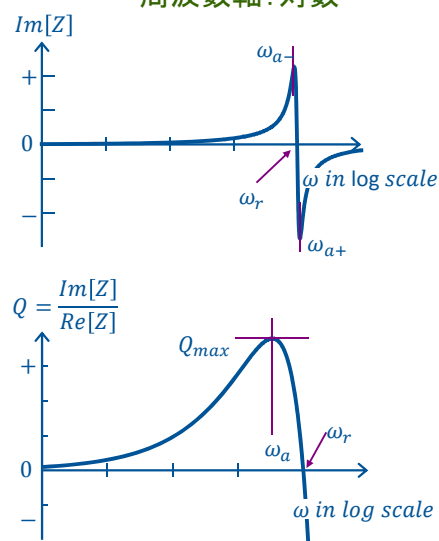
$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}} = \frac{\omega_r}{\sqrt{3}}$$

$$Q_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - \frac{CR^2}{L}\right)^{3/2}, \text{ at } \omega = \omega_a$$

## 周波数軸: 線形



## 周波数軸: 対数



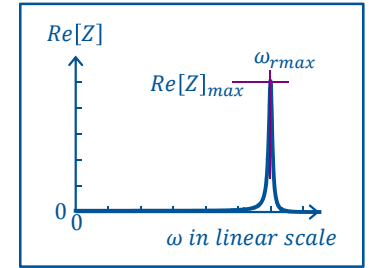
- $Re[Z]$  が最大になる周波数:  $\omega_{Rmax}$

(  $\frac{dRe[Z]}{d\omega} = 0$  となる周波数を求める。)

$$\omega_{Rmax} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{CR^2}{L}} > \omega_r$$

$$Re[Z]_{max} = \frac{1}{R} \left(\frac{L}{C}\right) \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4}\right) \frac{CR^2}{L}} \right]$$

at  $\omega = \omega_{Rmax}$



$$Im[Z] \Big|_{\omega=\omega_{Rmax}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{CR^2}{L}}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right) \frac{CR^2}{L}} \right]$$

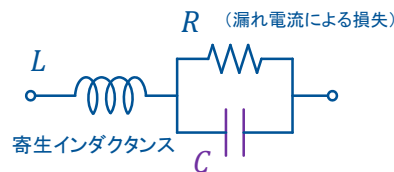
$$Z = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} + j \left\{ \omega L - \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} \right\}$$

- $Im[Z] = 0$  になる周波数  $\omega_r$  を求める。  $\omega_o \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$  とする。

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{CR^2}} < \omega_o, \quad \text{where } 1 - \frac{L}{CR^2} > 0$$

( 或いは  $\frac{L}{C} < R^2$  )

$$Z = \left(\frac{L}{C}\right) \frac{1}{R} \text{ at } \omega = \omega_r$$



- $Q \equiv \frac{Im[Z]}{Re[Z]}$  と定義し、 $Q_{max}$  になる周波数  $\omega_a$  を求める。

(  $\frac{dQ}{d\omega} = 0$  となる周波数を求める。)

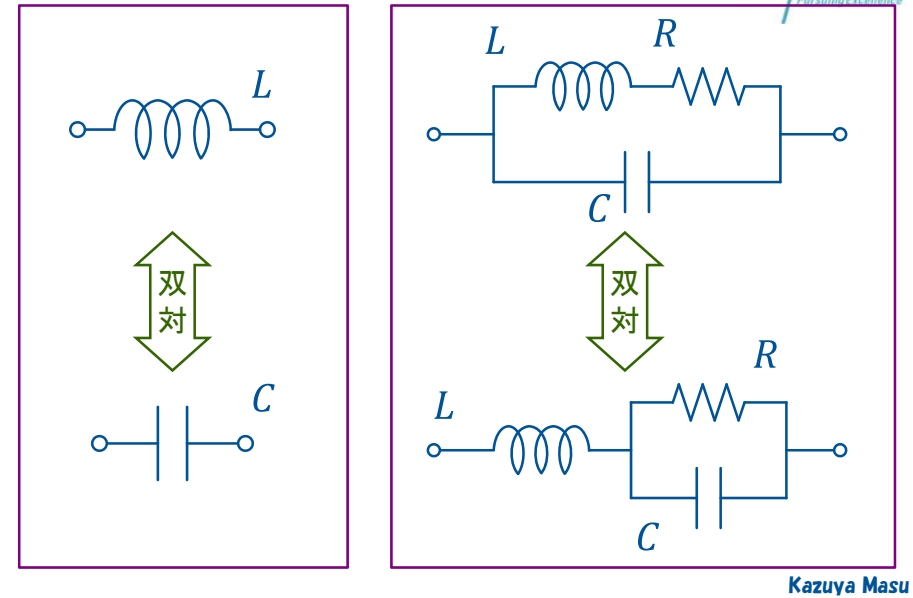
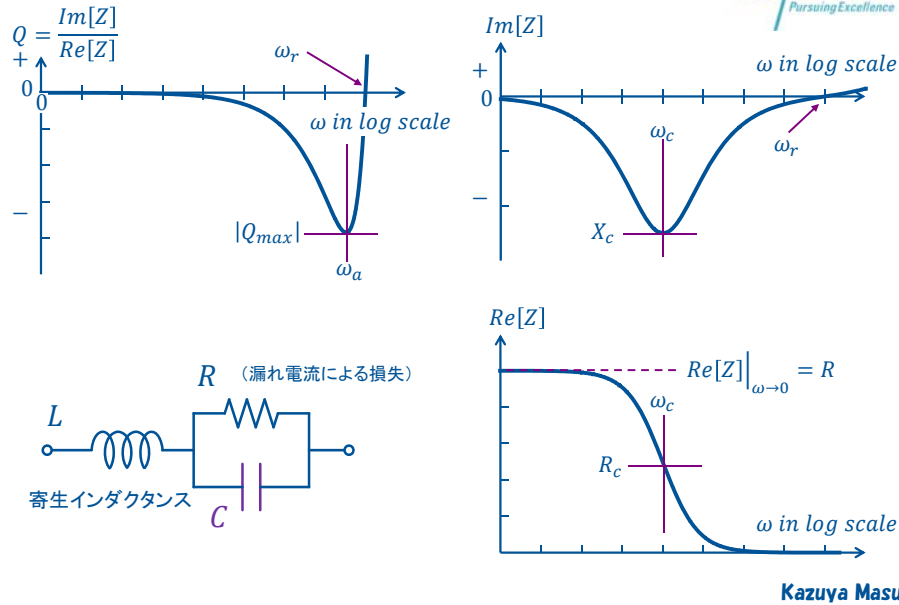
$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{CR^2}} = \frac{\omega_r}{\sqrt{3}}$$

$$Q_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} R \sqrt{\frac{C}{L}} \left(1 - \frac{L}{CR^2}\right)^{3/2}, \text{ at } \omega = \omega_a$$

- $Im[Z]$  の極値となる周波数  $\omega_c$  を求める。(  $\frac{dIm[Z]}{d\omega} = 0$  )

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{LC}} \left\{ \sqrt{1 + \frac{8L}{CR^2}} - \left(1 + \frac{2L}{CR^2}\right) \right\}^{1/2} \quad R_c \equiv Re[Z] \Big|_{at\omega_c} = \frac{2L}{CR} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8L}{CR^2}} - 1}$$

$$X_c \equiv Im[Z] \Big|_{at\omega_c} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L}{C}} \left( 3 - \sqrt{1 + \frac{8L}{CR^2}} \right) \frac{\left\{ \sqrt{1 + \frac{8L}{CR^2}} - \left(1 + \frac{2L}{CR^2}\right) \right\}^{1/2}}{\sqrt{1 + \frac{8L}{CR^2}} - 1}$$



Outline

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
  1. インダクタと容量の等価回路(基本)
  2. 容量の求め方(実例)
  3. インダクタンスの求め方(実例)
  4. LSIでのインダクタンス
5. RF回路設計に関わる事柄
6. まとめ

容量を求める。

- いくつかの線路の線間容量を求めてみます。
- 2導体があったとき、それぞれの導体の電荷を $+Q$ 、 $-Q$ として、導体間の電位差が $V$ であれば、容量 $C$ は

$$C = \frac{Q}{V}$$

電磁気学には直接関係しませんが、「微分容量」って何でしょうか？

## 簡単な静電場の例

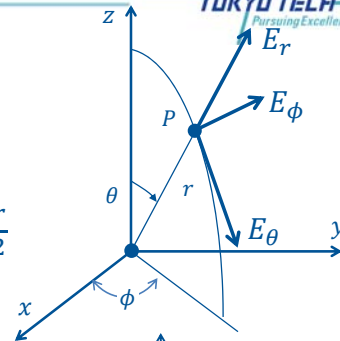
109

TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

- 原点 ( $r = 0$ ) に電荷 ( $q$ )

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = -\text{grad}\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

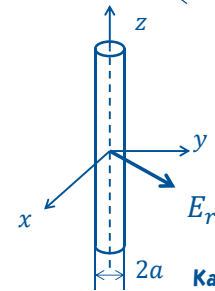


- 半径  $a$  の無限長さ金属に単位長さあたり  $\rho$  の電荷

$$\varphi(r, \theta, z) = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon} \log_e r + C$$

$$\mathbf{E}(r, \theta, z) = -\text{grad}\varphi = \frac{\rho}{2\pi\epsilon r} \mathbf{e}_r$$

(for  $r \geq a$ )



Kazuya Masu

## 平行平板 (平行平板線路を想定して)

110

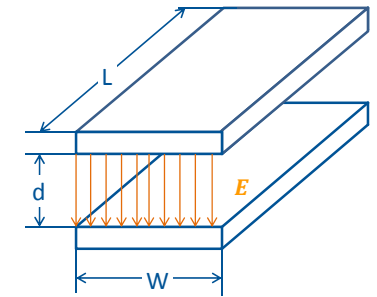
TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

- Edgeでの電界の乱れなどが無いと仮定

$$C = \epsilon \frac{WL}{d} \quad [F]$$

- 単位長さ当たりの容量

$$C = \epsilon \frac{W}{d} \quad [F/m]$$



Kazuya Masu

## 同軸ケーブルの容量

111

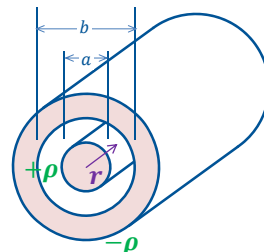
TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

- 内導体に  $+\rho [C/m]$ 、外導体に  $-\rho$  の電荷が存在するとして、導体間の電位差  $V$  を求める。  $C = \rho/V$  より単位長さあたりの容量を求める。

$$\mathbf{E}(r, \theta, z) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon r} \mathbf{e}_r$$

$$V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E}(r, \theta, z) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{\rho}{V_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \quad [F/m]$$



Kazuya Masu

## 平行往復導線の容量 (1)

112

TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

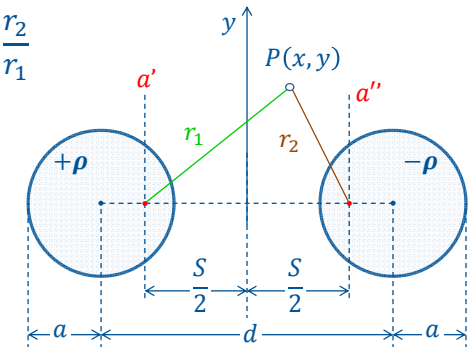
- 半径  $a$ 、間隔  $d$  の平行導線。  $d$  が  $a$  に比較して十分大きくないとする。(胸像法を利用して求める方法もある)
- $+\rho$ 、 $-\rho$  の電荷は導体表面に均一に分布せず、相互に引き合う。その結果、電荷分布の平均中心は  $a'$ 、 $a''$  となる。(近接効果)

- P点の電位  $V_P = \frac{\rho}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$   
( $r_1 = r_2$  で電位は零とする。)

- $r_2/r_1 = k$  なる等電位面を考える。幾何学的に

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{S}{2} + x\right)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{S}{2} - x\right)^2 + y^2}$$



Kazuya Masu

● 整理すると、 $\left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1} \frac{S}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{kS}{k^2-1}\right)^2$  (等電位面は円)

● 右導体を考えると、等電位面の半径は  $a = \frac{kS}{k^2-1}$ 、円の中心は、 $(x, y) = \left(\frac{k^2+1}{k^2-1} \frac{S}{2}, 0\right)$  にある。Sを消去してkを求めると、

$$k = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1}$$

電荷の偏りなしでもとめると、  
 $\left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1}\right) \rightarrow \frac{d-a}{a}$

● 両導体間の電位差を求める。

$$V = V_{left} - V_{right} = \frac{\rho}{\pi\epsilon} \ln \frac{S-a'}{a'} = \ln k$$

● 最終的に容量は、 $C = \frac{\rho}{V} = \frac{\pi\epsilon}{\ln k} = \frac{\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1}\right)}$

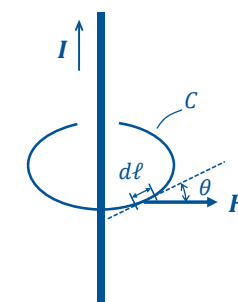
1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIに利用される材料
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
  1. インダクタと容量の等価回路(基本)
  2. 容量の求め方(実例)
  3. インダクタンスの求め方(実例)
  4. LSIでのインダクタンス
5. RF回路設計に関わる事柄
6. まとめ

- 電磁気学の復習をしてから、線路のインダクタンスを求める。
- 求め方は、電磁気学の教科書や演習書(末尾の演習書を参照下さい)に書いてあるが、集積回路の寸法で計算してみることで、インダクタンスの大きさを感覚として理解する。

Ampereの周回積分の法則

- 任意の閉曲線  $c$  に沿う磁界  $H$  の周回積分は、 $c$  と鎖交する電流  $I_i$  の代数和に等しい。

$$\oint_C H \cdot dl = \sum I_i$$

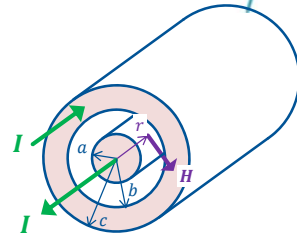


## Ampereの周回積分 (例題)

117

TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

- 内導体と外導体に電流  $I$  が逆方向に流れている。 $r$  における磁界  $H$
- $r$  の内側の電流  $I_r$  を求めて Ampereの周回積分を利用

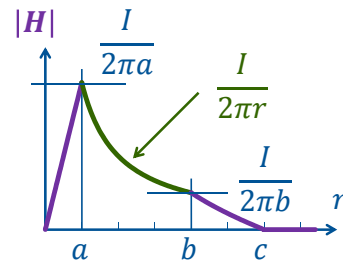


$$H = \frac{I}{2\pi a^2} r \quad \text{for } r \leq a$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{for } a \leq r \leq b$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \quad \text{for } b \leq r \leq c$$

$$H = 0 \quad \text{for } c \leq r$$



Kazuya Masu

## Biot-Savart's law

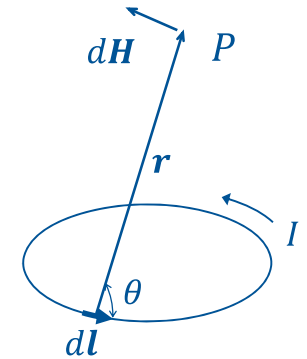
118

TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

- ひとつの閉回路  $C$  に沿って流れる電流  $I$  によって  $P$  点に生じる磁界強度  $H$

$$H = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{dl \times r}{r^3}$$

$$dH = \frac{I dl \times r}{4\pi r^3}$$



ところで、Biot-Savartの法則は如何にして導出されるのか？

1. 理論的？
2. 実験的？

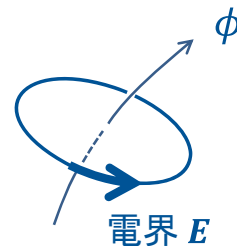
Kazuya Masu

## Faradayの電磁誘導の法則

119

TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

- ある回路に鎖交する磁束  $\phi$  が時間的に変化すると、その変化を妨げる方向に逆起電力  $e$  が発生する。
- 起電力



$$e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS = -\frac{d\phi}{dt}$$

(回路に動きがなく、磁束電界  $B$  が変化するとき)

Kazuya Masu

## 電磁誘導の法則

120

TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

- 長さ  $dl$  の導体が速度  $v$  で、磁束密度  $B$  なる磁束を切断するとき誘起される起電力

$$de = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dl$$

(磁束電界  $B$  が変化せず、回路が動くとき)

- 磁束変化と導体運動の両方が存在するとき

$$e = -\frac{d\phi}{dt} + \int_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dl$$

Kazuya Masu

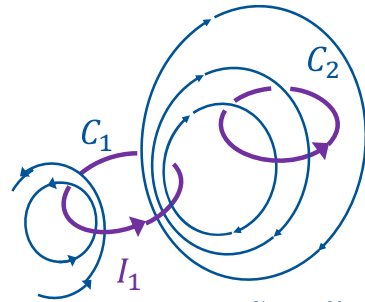
- 電流  $I_1$  が流れるコイル  $C_1$  の作る磁場を  $\Phi_1$

$$\Phi_1 = L_1 I_1$$

自己インダクタンス  
Self inductance

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

- 自己誘導: コイル内の電流変化により自分自身の内部に誘導起電力が生じる現象



Kazuya Masu

- 相互誘導: 電流  $I_1$  が流れるコイル  $C_1$  の作る磁場を  $\Phi_1$  は、コイル  $C_2$  を貫く磁束  $\Phi_2$  を生じせしめる

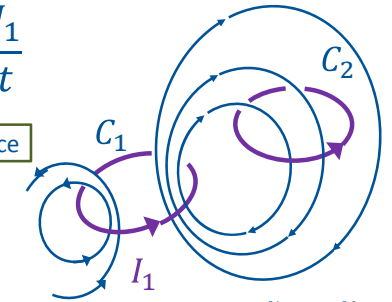
$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \quad \leftarrow \text{相互誘導}$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

相互インダクタンス mutual inductance

- 相反定理により、

$$M_{21} = M_{12}$$



Kazuya Masu

- 電流  $I$  の流れるインダクタ  $L$  に蓄えられるエネルギー

$$U_m = \frac{L I^2}{2}$$

- 磁気エネルギー密度

$$u_m = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{H \cdot B}{2}$$

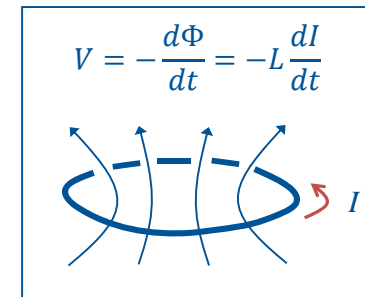
- 電圧  $E$  の流れる容量  $C$  に蓄えられるエネルギー

$$U_e = \frac{C V^2}{2}$$

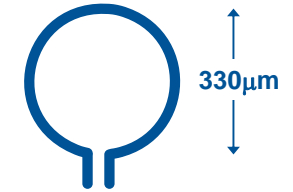
- 電気エネルギー密度

$$u_m = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{E \cdot D}{2}$$

Kazuya Masu



Square Shape



Which structure does have large self-inductance ?

Straight Line



Kazuya Masu

導体内部に均一に電流が流れている(低周波)場合

1. 導体内部 ( $x < a$ ) の磁界強度

$$H = \frac{rI}{2\pi a^2}$$

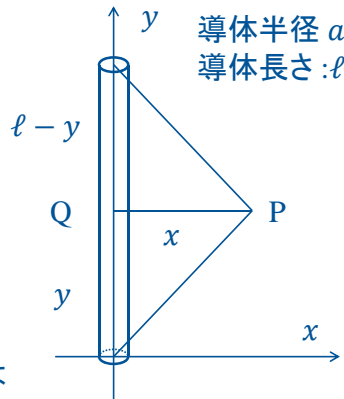
2. 導体内部の磁界エネルギー  $U$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \mu H^2 2\pi r \ell dr$$

$$= \frac{\mu \ell I^2}{4\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu \ell I^2}{16\pi}$$

3. 導体内部の自己インダクタンス  $L_i$  は  $U = L_i^2 I^2 / 2$  より、

$$L_i = \frac{\mu \ell}{8\pi} \quad \dots (1) \quad L_i = \frac{\mu \ell}{8\pi} \quad \dots (1)$$



内部インダクタンスは  
導体径に依存しない。  
長さのみで決定される

Kazuya Masu

4. 導体外部 ( $x > a$ ) のP点における磁界強度

$$H = \frac{I}{4\pi x} \left( \frac{\ell - y}{\sqrt{x^2 - (\ell - y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

5. 導線の鎖交磁束  $\phi$

$$\phi = \int_0^\ell \int_0^\infty \mu_0 H dx dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sqrt{x^2 - \ell^2}}{x} - 1 \right) dx$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \ell \log \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} - \sqrt{a^2 + \ell^2} + a \right)$$

6. 導体外部の自己インダクタンス  $L_{out}$  は  $U = L_{out} \phi$  より、

$$L_{out} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ell \log \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} - \sqrt{a^2 + \ell^2} + a \right) \quad \dots (2)$$

Kazuya Masu

7. 求める自己インダクタンス  $L = L_i + L_{out}$

$$L = \frac{\mu \ell}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ell \log \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} - \sqrt{a^2 + \ell^2} + a \right) \quad \dots (3)$$

8. 導線が十分に長い ( $\ell \gg a$ ) とする。また、導体内部の比透磁率が真空の透磁率と等しい ( $\mu = \mu_0$ ) として、

$$L \approx \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left( \log \frac{2\ell}{a} - \frac{3}{4} \right) \quad \dots (4)$$

Kazuya Masu

- この導出では、同線内での電流密度は一定であると仮定している。すなわち、直流電流を想定している。
- 電流が表皮に偏る、すなわち表皮効果が顕在化したときたときのインダクタンスはどのようになるだろうか？

Kazuya Masu



- 求める自己インダクタンス  $L = L_i + L_{out}$

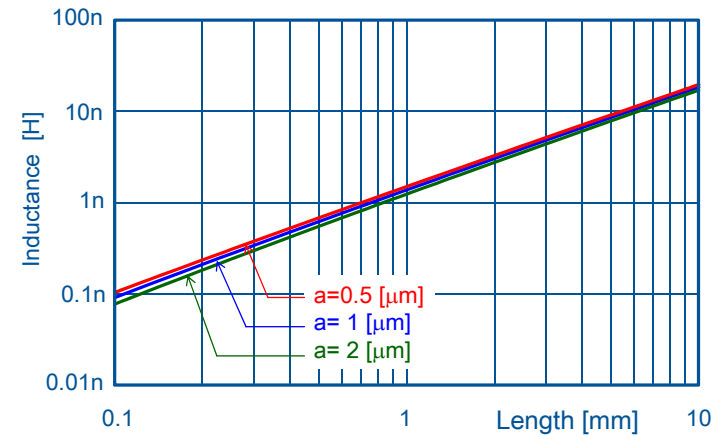
$$L = \frac{\mu\ell}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ell \log \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} - \sqrt{a^2 + \ell^2} + a \right) \dots (3)$$

- この(3)式であるが、単位長あたりのインダクタンスにできるかしら？

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \log \frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a} - \frac{\sqrt{a^2 + \ell^2} - a}{\ell} \right) \dots (3')$$

単位長あたりとは言わない！

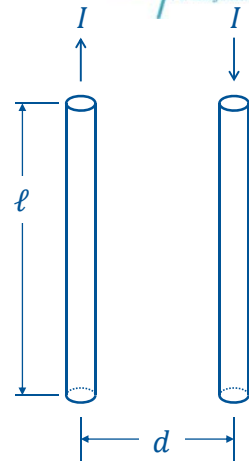
約1.4 [nH/mm]



1. 往復線路1本当たりの自己インダクタンス

$$L = \frac{\mu_0\ell}{2\pi} \left( \log_e \frac{d-a}{a} + \frac{1}{4} \right)$$

$$L \approx \frac{\mu_0\ell}{2\pi} \left( \log_e \frac{d}{a} + \frac{1}{4} \right), d \gg a$$

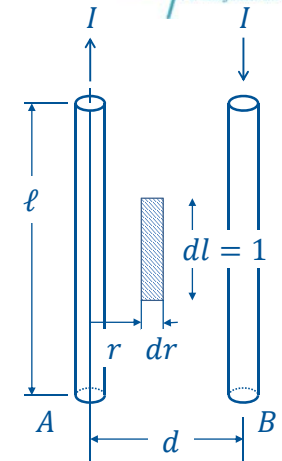


導体半径  $a$   
 導体長さ:  $\ell$   
 導体間隔:  $d$

- $L = L_{in} + L_{out}$
- $L_{in}$ : 導体内部のインダクタンス
- $L_{out}$ : 導体外のインダクタンス
- $L_{in}$  はすでに導出済。

$$\blacksquare L_{in} = L_{in}^{line A} + L_{in}^{line B} = 2 \times \frac{\mu\ell}{8\pi} \dots (1)$$

- $L_{out}$  は以下のように求める。
- 線間の微小面積  $ds = dr \times dl$  を鎖交する磁界を線間で積分して全鎖交磁束を求める。



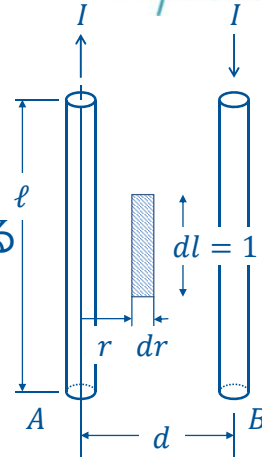
導体半径  $a$   
 導体長さ:  $\ell$   
 導体間隔:  $d$

- $ds = dr \times dl$  を鎖交する磁界

$$H = \frac{I}{2\pi r} + \frac{I}{2\pi(d-r)} \dots (2)$$

- 単位長の微小面積  $ds$  を鎖交する磁束  $d\phi = \mu_0 H ds$  を積分すると全磁束が求まる。

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_a^{d-a} d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{d-a} \left( \frac{I}{r} + \frac{I}{d-r} \right) dr \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \log_e \frac{d-a}{a} \dots (3) \end{aligned}$$



導体半径  $a$   
導体長さ  $l$   
導体間隔  $d$   
Kazuya Masu

- $\Phi = L_{out} I$  より、 $L_{out}$  が求まる。往復導線
- $L = L_{in} + L_{out}$  より、往復導線のインダクタンス(2本分の合計)は、

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \left( \log_e \frac{d-a}{a} + \frac{1}{4} \right) \dots (4)$$

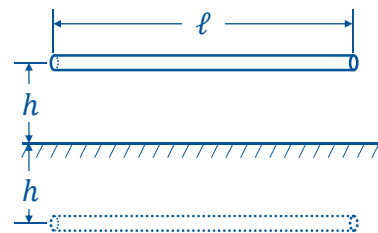
- 1本当たりの自己インダクタンスは、

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left( \log_e \frac{d-a}{a} + \frac{1}{4} \right) \dots (5)$$

- 接地面から、 $h$  の距離にある導体の自己インダクタンス
- 接地面を完全導体とみなすと、鏡像の位置にリターン電流が流れると考えれば良い。

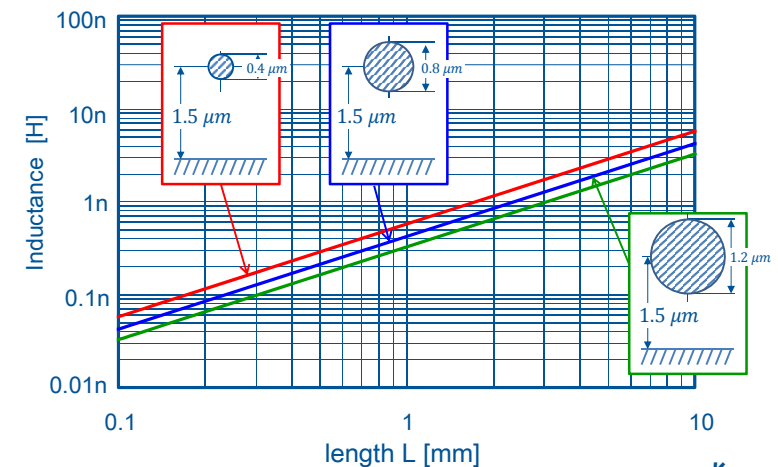
$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left( \log_e \frac{2h-a}{a} + \frac{1}{4} \right)$$

$$L \approx \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left( \log_e \frac{2h}{a} + \frac{1}{4} \right), h \gg a$$

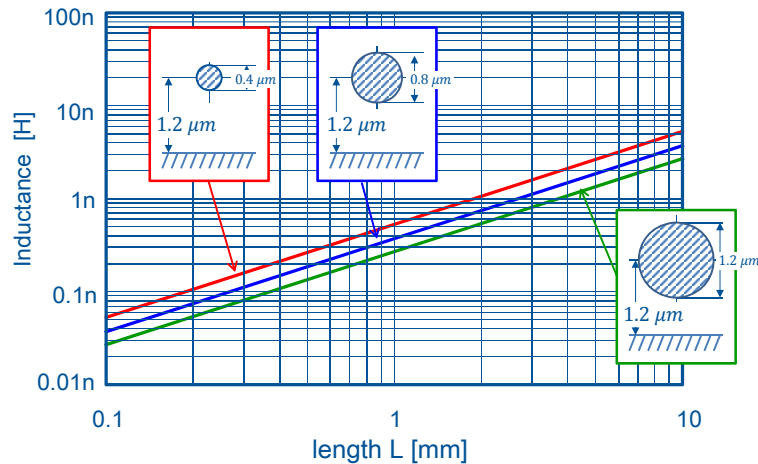


導体半径  $a$   
導体長さ  $l$   
接地面からの距離  $h$   
Kazuya Masu

0.3~0.6[nH/mm]



0.3~0.6[nH/mm]

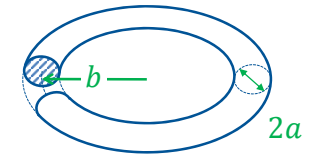


Kazuya Masu

- 断面半径  $a$  の導体で、平均半径  $b$  の円形コイルを構成した。(  $b \gg a$  )

$$L = \frac{\mu_0 b}{2} \left( \log_e \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right)$$

$$L = \frac{\mu_0 R}{4\pi} \left( \log_e \frac{4R}{a\pi} - \frac{7}{4} \right)$$

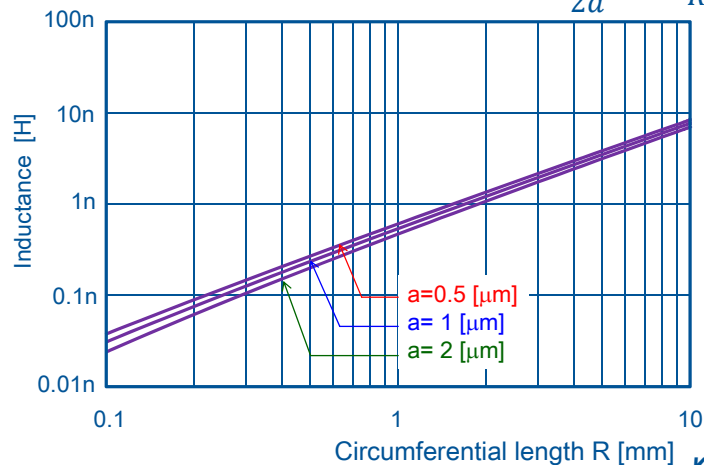
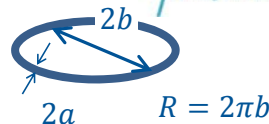


導体断面半径  $a$   
平均半径 :  $b$

線長 :  $R = 2\pi b$

Kazuya Masu

約0.5[nH] for R=1[mm]



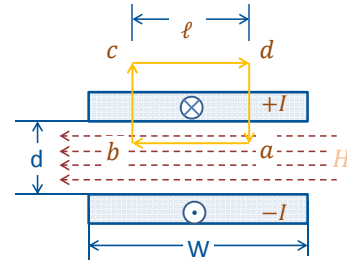
Kazuya Masu

- 直線導体やリングのインダクタンスは、電磁気学の演習書にもよく掲載されている問題です。
- 表皮効果が顕在化して、電流が導体表面だけを流れるようになると、内部自己インダクタンス(0.05nH/mm)分だけ、自己インダクタンスは減少します。

Kazuya Masu

- $+I, -I$  の流れている平行平板線路を考える。
- Ampereの周回積分  $\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i$  を  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$  に適用する。
- $H\ell = \frac{\ell}{W}I$  であるので、  $\Phi = \int_0^d \mu H dx = \mu \frac{d}{W}I$
- $\Phi = LI$  より、

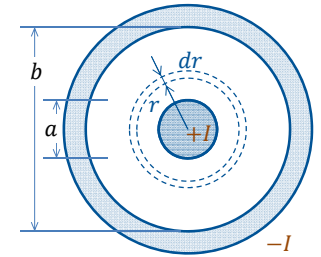
$$L = \mu \frac{d}{W}$$



Kazuya Masu

- $a < r < b$  における磁界  $H = \frac{I}{2\pi r}$
- 磁束は、  $d\phi = \mu H dr = \frac{\mu I}{2\pi r} dr$
- 全磁束は、  $\Phi = \int_a^b d\phi = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
- 自己インダクタンス

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



- 低周波のときの内部導体の内部インダクタンスをくわえて

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \left( \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right)$$

Kazuya Masu

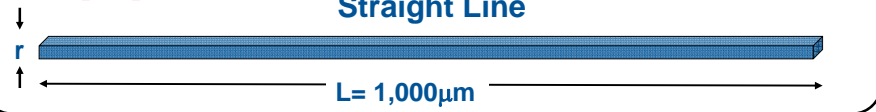
## Outline

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
  1. インダクタと容量の等価回路(基本)
  2. 容量の求め方(実例)
  3. インダクタンスの求め方(実例)
  4. LSIでのインダクタンス
5. RF回路設計に関わる事柄
6. まとめ

Kazuya Masu

## Self inductance of straight line

1.4 [nH]



Straight Line

$L = 1,000 \mu\text{m}$

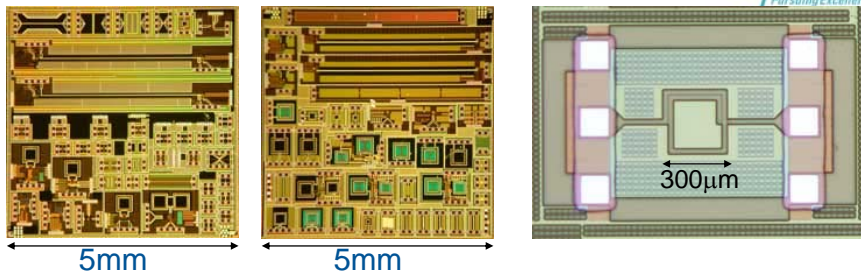
$$L \approx \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left( \log \frac{2\ell}{a} - \frac{3}{4} \right) \dots (1)$$

If the cross section of the wire is  $2\mu\text{m} \times 2\mu\text{m}$ , wire resistance is 6-9  $\Omega$ , and reactance  $|\omega L|$  at 1[GHz] is 10  $\Omega$ . Reactance due to the wire inductance become the same order values. This shows the importance of the modeling of wire inductance. At least, we cannot ignore the inductive component of the wire.

Eq. (1) was derived by Rosa: E.B. Rosa, "The Self and Mutual Inductances of Linear Conductors", Bulletin of the Bureau of Standards, Vol.4, No.2, 1908, Page 301ff.

Kazuya Masu

# Si基板上のインダクタ



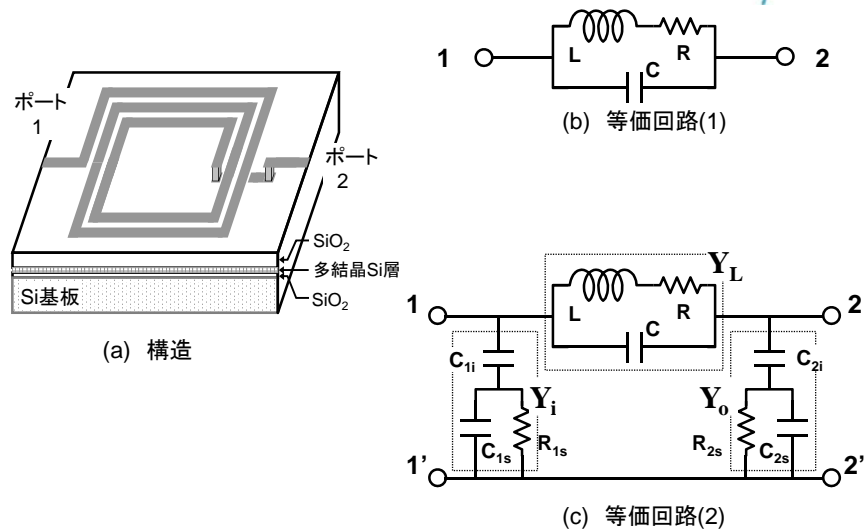
直径 100µm – 600µm  
 インダクタンス 0.1nH – 10nH  
 周波数 0.5GHz – 20GHz  
 Q値 3 – 15

キャパシタ 20 – 50程度

配線抵抗によるロス  
 Si基板によるロス

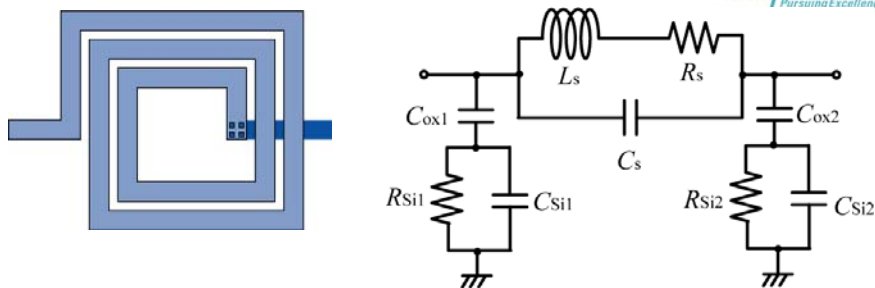
Kazuya Masu

# On chip inductor



Kazuya Masu

# スパイラルインダクタの等価回路

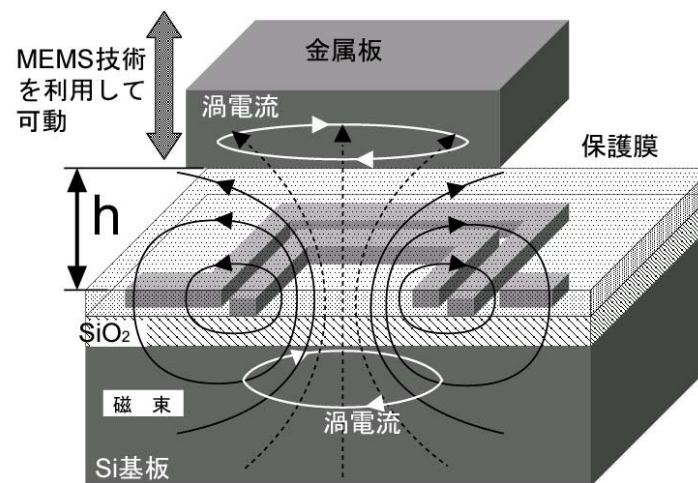


$L_s$ : インダクタンス-(渦電流による損失)  
 $R_s$ : 配線抵抗+(基板渦電流による抵抗)  
 $C_s$ : 配線間容量  
 $C_{ox}$ : 基板-配線間容量  
 $R_{Si}$ : 基板抵抗  
 $C_{Si}$ : 基板容量

物理的な根拠は薄い

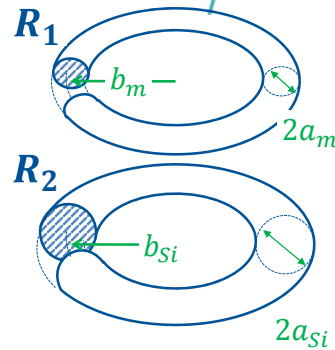
Kazuya Masu

# スパイラルインダクタの等価回路



Kazuya Masu

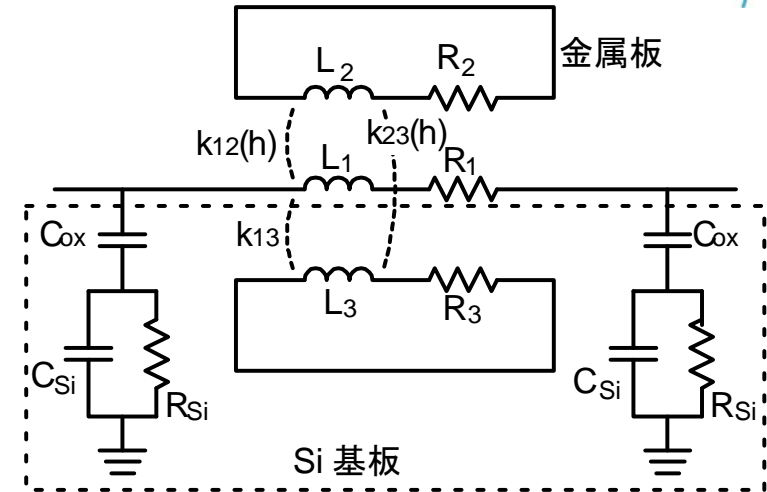
- 金属配線により、リングインダクタ $R_1$ をつくる。このインダクタにより、Si基板に渦電流が流れる。
- これを何とか解析的にモデリングしたい。
- Si基板中の渦電流が流れる領域は断面 $a_{Si}$ をもつリングと仮定する。
- リング $R_1$ とリング $R_2$ の間の相互インダクタンスは解析的に求められるはずなので、断面 $a_{Si}$ を適当に定めることができるならば、渦電流損を上手く表現できると思われる。



導体 断面半径:  $a_m$   
 平均半径:  $b_m$   
 Si中の渦電流 断面半径:  $a_{Si}$   
 平均半径:  $b_{Si} = b_m$

線長:  $R = 2\pi b$

Kazuya Masu



物理的には、比較的正しい。

Kazuya Masu

## Outline

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
5. RF回路設計に関わる事柄

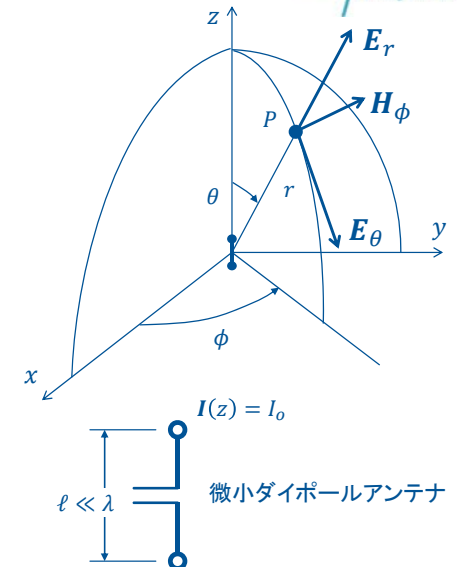
1. 電磁波の放射と放射インピーダンス
2. 線路: 伝送線路
3. 長距離伝送の考え方
4. いくつかの線路の特性インピーダンス
5. 何故、線路は50Wなのか。

## 6. まとめ

Kazuya Masu

## 微小ダイポールからの放射

- 微小ダイポール
  - 波長より十分長さが短い  $l \ll \lambda$
  - 角周波数  $\omega$  の電流  $\vec{I} = I_0 \vec{i}_x$  が一様に流れる
- P点における電界  $E = [E_r, E_\theta, E_\phi]$ 、磁界  $H = [H_r, H_\theta, H_\phi]$  は次のように求められる。



Kazuya Masu

$$k = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$E_r = j \frac{120\pi \ell I_0}{\lambda} e^{-jkr} \left\{ \frac{1}{jkr^2} + \frac{1}{(jk)^2 r^3} \right\} \cos \theta$$

$$E_\theta = j \frac{60\pi \ell I_0}{\lambda} e^{-jkr} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2} + \frac{1}{(jk)^2 r^3} \right\} \sin \theta$$

$$H_\phi = j \frac{\ell I_0}{2\lambda} e^{-jkr} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2} \right\} \sin \theta$$

$$E_\phi = 0 \quad H_r = H_\theta = 0$$

静電界

放射界

誘導電磁界

遠方の届くのは、放射界

$$E_\theta = j \frac{60\pi \ell I_0}{\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta \quad H_\phi = j \frac{\ell I_0}{\lambda r} e^{-jkr} \sin \theta$$

- 位相項は  $e^{-jkr}$  であり、 $E_\theta$  及び  $E_\phi$  は、 $r$  方向へ  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  で伝搬する進行波
- 電界  $E_\theta$  及び磁界  $H_\phi$  は直交し、進行方向 ( $r$  方向) とも直交する。
- $E_\theta/H_\phi = 120\pi = \eta_0$  (真空の固有インピーダンス) である。

$r$  方向へ伝搬する平面波

- ポインティングベクトル  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
  - ポインティング電力  $P = E_\theta H_\phi = \frac{E_\theta^2}{\eta_0}$
- $$P(r, \theta, \phi) = 30\pi \left( \frac{\ell I_0}{\lambda r} \right)^2 \sin^2 \theta \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

- これを全空間で積分して全放射電力を求める。

$$W_r = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= 60\pi \left( \frac{\ell I_0}{\lambda r} \right)^2 r^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 80\pi^2 \left( \frac{\ell}{\lambda} \right)^2 I_0^2 [W]$$

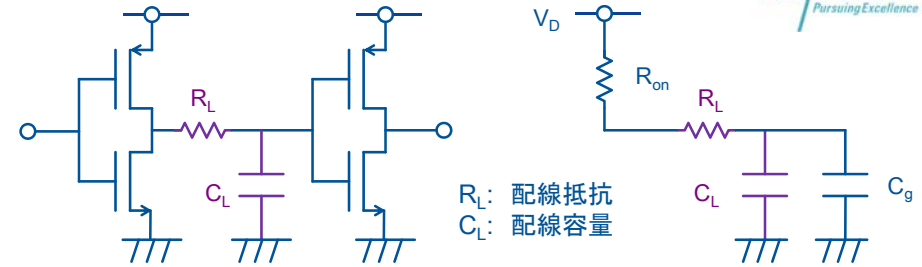
- 電流  $I_0$  が流れたときの有効電力が放射電力  $W_r$  である。すなわち、微小ダイポールに  $R_c = W_r/I_0^2$  の抵抗が存在することに相当
- $R_c$  : 放射抵抗 (radiation resistance)

$$R_c = \frac{W_r}{I_0^2} = 80\pi^2 \left( \frac{\ell}{\lambda} \right)^2 [\Omega]$$

- 半波長アンテナでは  $73.13\Omega$ 、 $\lambda/4$  アンテナでは  $36.57\Omega$  となる。
- 当日の講演では、多少詳細に述べる。折折角なので逆Lアンテナなども紹介する。

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIに利用される材料
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
5. RF回路設計に関わる事柄
  1. 電磁波の放射と放射インピーダンス
  2. 線路: 伝送線路
  3. 長距離伝送の考え方
  4. いくつかの線路の特性インピーダンス
  5. 何故、線路は50Wなのか。
6. まとめ

Kazuya Masu



$R_L$ : 配線抵抗  
 $C_L$ : 配線容量

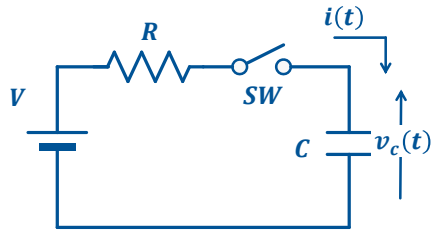
$$V = V_D \left\{ 1 - \exp \left( - \frac{t}{(R_{on} + R_L)(C_g + C_L)} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \tau &= (R_{on} + R_L)(C_g + C_L) \\ &\approx R_{on}C_g + R_L C_L \\ &= \tau_{gate} + \tau_{line} \end{aligned}$$

- デジタル集積回路の動作は、RC充放電で理解できる。
- ところで、次の3枚のスライドでRC回路の動作を記述しているが、仮に抵抗がゼロの極限ではどうなるか、考えて見ると面白い。抵抗ゼロの配線は存在しないと言わずに考えて見てください。

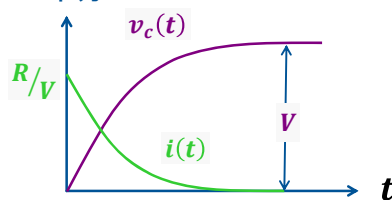
Kazuya Masu

RC回路の充放電(1)



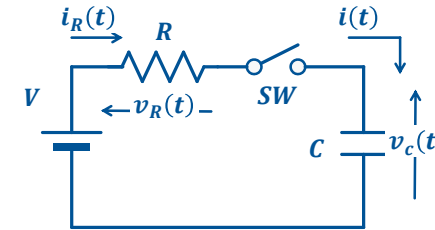
- コンデンサCに電源Vを接続したとき、コンデンサには、 $Q = CV$ の電荷が蓄えられる。
- また、電源Vのした仕事Wは、 $W = QV$ である。

- 電流、電圧は、
  - $v_c(t) = V(1 - e^{-t/RC})$
  - $i(t) = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$
- コンデンサで消費されるで電力、積分してエネルギー
  - $W = \int_0^\infty i(t)v_c(t)dt = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$
- 半分？

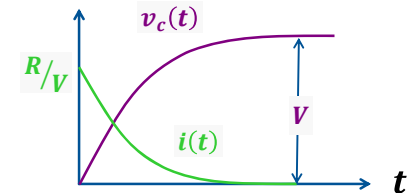


Kazuya Masu

RC回路の充放電(2)

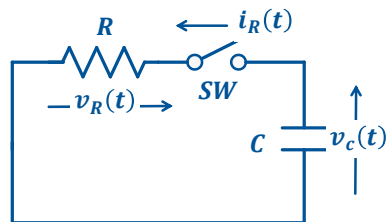


- 抵抗の電流、電圧は、
  - $v_R(t) = V - v_c(t) = V e^{-t/RC}$
  - $i_R(t) = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$
- 抵抗で消費されるエネルギー
  - $W = \int_0^\infty i(t)v_R(t)dt = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$



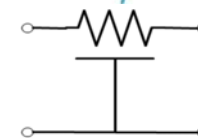
Kazuya Masu



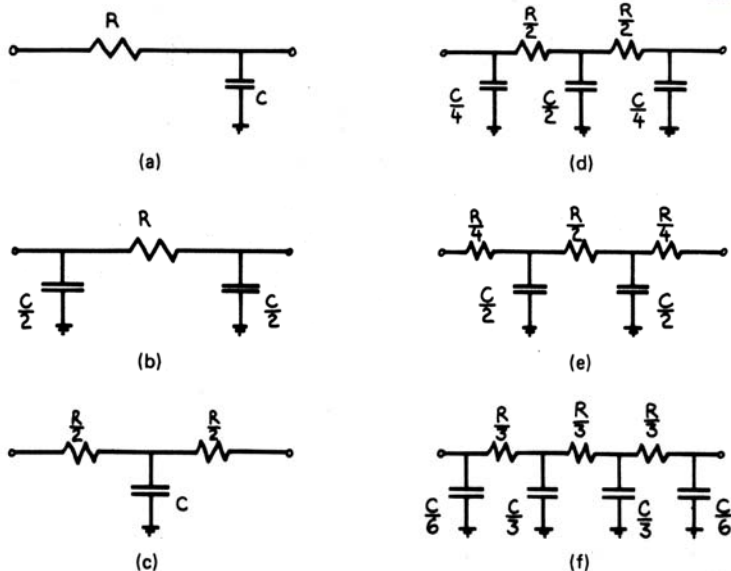
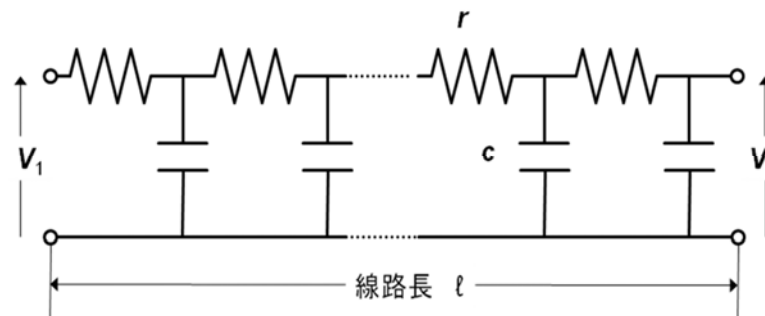


- 電流、電圧は、
  - $v_R(t) = \frac{Q}{C} e^{-t/RC}$
  - $i_R(t) = \frac{Q}{CR} e^{-t/RC}$
- 抵抗で、 $W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$  のエネルギーが消費される。
- 要は、コンデンサCが充放電すると、電源から供給されたエネルギー“QV”は、充電時に半分ジュール熱として失われ、放電時に残りの半分をジュール熱として失う。

- コンデンサCに  $Q = CV$  の電荷が蓄えられるとする。  
 $t = 0$  でSWをonすると、蓄えられた電荷は抵抗を通じて放電する。
- また、電源Vのした仕事Wは、 $W = QV$ である。



- 分布RC線路とは、一般によく知られる分布定数回路  $L=G=0$  なる線路である。



- 有限長さ( $l$ )の分布RC線路において、出力端に抵抗を接続していない場合、入力  $V_1$  に単位ステップ電圧を加えた時の任意の位置  $x$  における電圧  $V$  は解析的に求めることが可能である。

$$V(x, s) = \frac{\cosh(\sqrt{scr}(l-x))}{s \cosh(\sqrt{scr} l)} V_{in} \quad (1)$$

$$I(x, s) = \sqrt{\frac{c}{sr}} \frac{\sinh(\sqrt{scr}(l-x))}{s \cosh(\sqrt{scr} l)} V_{in} \quad (2)$$

昔の電気回路の教科書はこの手の回路を解いている。数学的には結構大変。(例) 基礎電気回路(1)(2)(3)改訂 (電子通信大学講座 第13-1~3巻)

● 時間軸での解(厳密解)

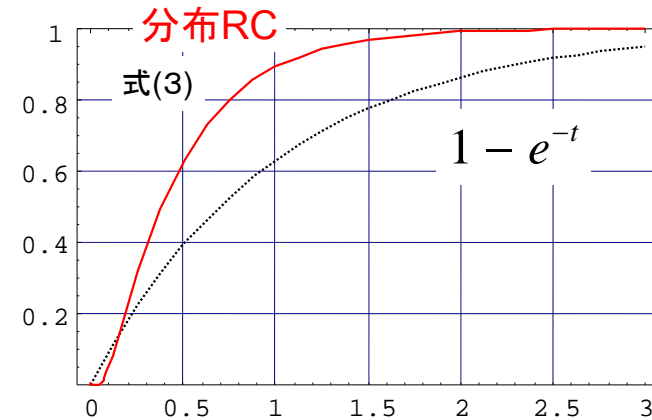
$$V(x, t)/V_{in} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4rc l^2} t\right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \dots (3)$$

$$V(x, t)/V_{in} = \frac{2}{rl} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4rc l^2} t\right) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \dots (4)$$

- 個人的には解析的に解けることは非常に興味あるのだが、現在ではあまり教えない範囲にある。
- 電気回路の教科書を読むときは、その教科書の執筆された年代を頭に入れて読むと面白い。

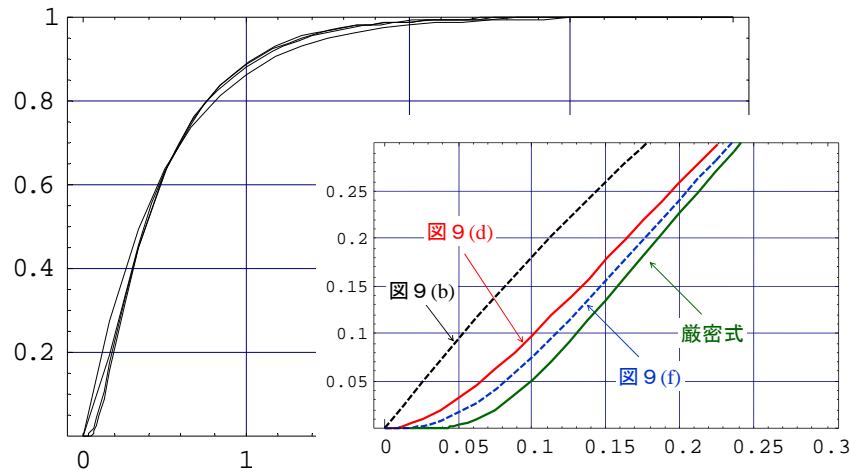
Kazuya Masu

● 90%立ち上がり時間 RC vs 2.3RC



Kazuya Masu

● (b): 3素子、(d): 5素子、(f): 7素子



asu

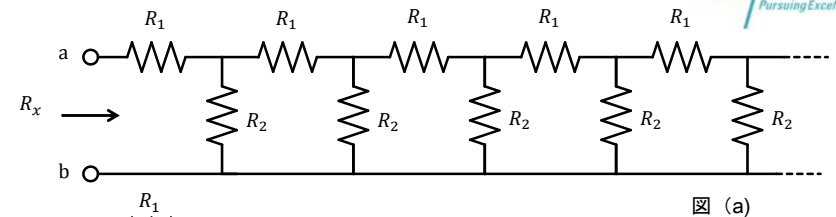


図 (a)

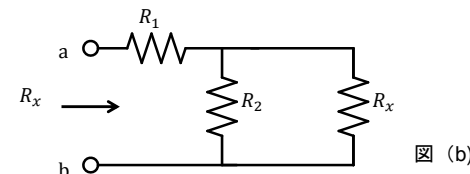


図 (b)

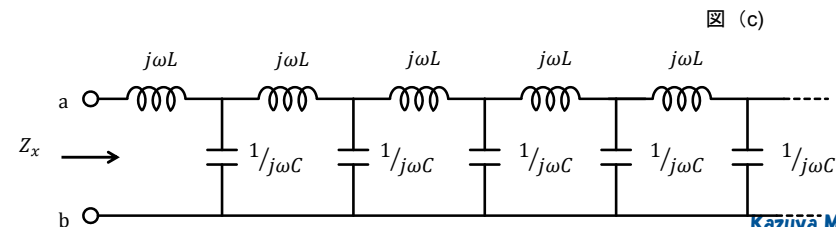


図 (c)

Kazuya Masu

1. 図(a)が図(b)と等価であることを利用して、図(a)の抵抗  $R_x$  を求めよ。(この問題は初歩電気回路の本)
2. 図(c)のインピーダンス  $Z_x$  を①と同様の方法で求めてみよ。
3. 図(c)の回路は、インダクタンス及び容量を単位長さあたりの値とすると無限長さ伝送線路になる。無限長さ伝送線路の場合は端子a-bから見たインピーダンスは線路の特性インピーダンス  $\sqrt{L/C}$  になるはずである。上記②の結果において、どのような仮定をおくと、a-bから見たインピーダンスが  $Z = \sqrt{L/C}$  と抵抗成分だけになるかを論ぜよ。この仮定は線路が無限長であることと矛盾するか、しないか論ぜよ。

Kazuya Masu

- 図1(a)の抵抗は

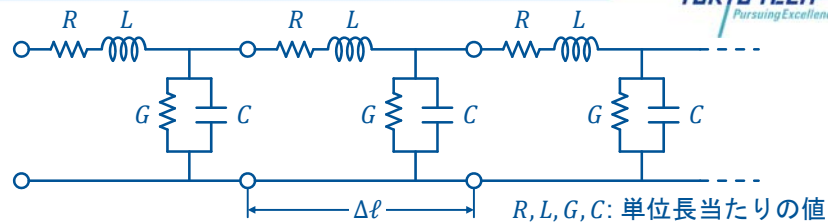
$$R_x = R_1 + \frac{R_2 R_x}{R_2 + R_x} \text{ より、}$$

$$R_x = \frac{1}{2} \left( R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2} \right)$$

- $R_1 \rightarrow j\omega L, R_2 \rightarrow 1/j\omega C$  と置き換えれば良いはずである。

Kazuya Masu

線路方程式



線路方程式

$$\begin{cases} -\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + RI(z, t) \\ -\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} + GV(z, t) \end{cases}$$

$V(z, t) = V(z)e^{j\omega t}$  とおく。定常状態の線路方程式

Kazuya Masu

波動方程式： 線路と電磁波

波動方程式(線路) $\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 V(z)$ $\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 I(z)$	伝搬定数 $\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C)$ 特性インピーダンス $Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$
波動方程式(電磁波) $\frac{\partial^2 E_{x0}(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{x0}(z)$ $\frac{\partial^2 H_{y0}(z)}{\partial z^2} = \gamma^2 H_{y0}(z)$	伝搬定数 $\gamma = \{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\}^{1/2}$ 特性インピーダンス $\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon + \sigma}} [\Omega]$

Kazuya Masu

- 伝送線路の線路方程式は、電磁波の波動方程式と同じ表式である。
- 伝送線路(マイクロストリップラインや同軸線路)にTEM波が伝搬していると考えれば、同じ定式化ができて当たり前である。

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$$

$$V(z) = A \exp(-\gamma z) + B \exp(+\gamma z)$$

進行波のみを示すと、  $V(z) = V_o e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$

$$I(z) = \frac{V_o}{Z_o} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC)}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC)}$$

$$R = G = 0$$

$$\Rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \omega \sqrt{LC}$$

$\lambda$ : wave length of the signal  
 $f$ : signal frequency  
 $\epsilon_r$ : relative dielectric constant

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c_o}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \frac{1}{f}$$

**L: interconnect length**

**L** <<  $\lambda$

**Lumped constant circuit**

**L**  $\approx$   $\lambda$

**Distributed constant circuit**

**Criteria**  $L \gtrsim \left( \frac{1}{40} \sim \frac{1}{100} \right) \times \lambda$

Analog Circuit:  $l$ : wire length

$$l > \left( \frac{1}{100} \sim \frac{1}{40} \right) \times \lambda, \quad \lambda = \frac{c}{f}$$

PC board design

Rising time ( $\tau_{rise}$ ) of pulse becomes shorter than the round trip time of signal through the wire.

$$2 \times \tau_{delay} > \tau_{rise}$$

Analog Circuit  $l > \frac{1}{40} \times \lambda$

- Phase: 10-degree
- Reflection coefficient of signal  
Ideal open/short terminal :  $\Gamma = -1$  or  $+1$   
→  $\Gamma = -0.73$  or  $+0.9$  (3dB change)

Rising time of pulse is generally 5% of the period.

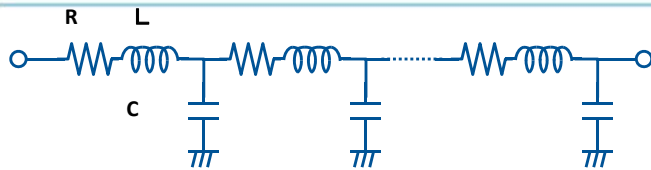
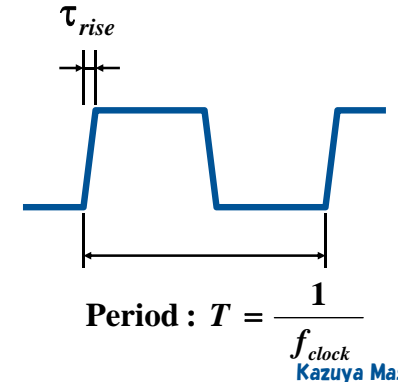
$$\tau_{\text{rise}} = 5\% \text{ of period} = \frac{T}{20} = \frac{1}{20} \frac{1}{f_{\text{clock}}}$$

$$2 \times \tau_{\text{delay}} > \tau_{\text{rise}}$$

$$2 \times \frac{l}{v} > \frac{1}{20} \frac{1}{f_{\text{clock}}}$$

$$2 \times \frac{l}{f_{\text{clock}} \lambda} > \frac{1}{20} \times \frac{1}{f_{\text{clock}}}$$

$$l > \frac{1}{40} \times \lambda$$



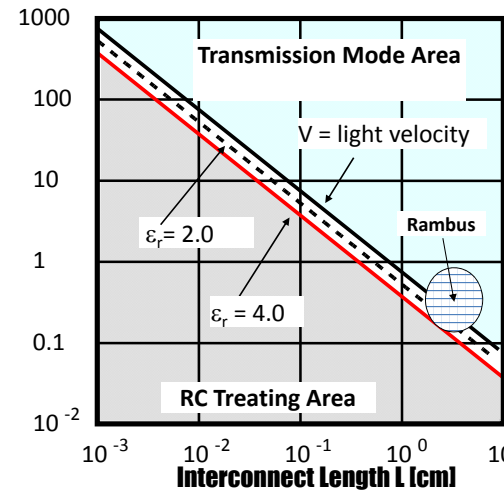
R,L,and C:

Resistance, Inductance, and capacitance per unit length

$$\omega L_T < \frac{1}{40} \times \frac{1}{\omega C_T} \sim \left(\frac{\pi}{20}\right)^2 \times \frac{1}{\omega C_T}$$

$$L_T = L \times \text{length} \text{ and } C_T = C \times \text{length}$$

Rising time of the pulse →  $\tau_{\text{rise}} = (1/20)(1/f)$   
The condition that the inductance components can be neglected results in  
“ The rising time is equal to (or less than) the twice of the delay time of the line.”



Critical Frequency ( $f_c$ ) :

$$L = \frac{1}{40} \times \lambda = \frac{1}{40} \times \frac{1}{f_c} \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

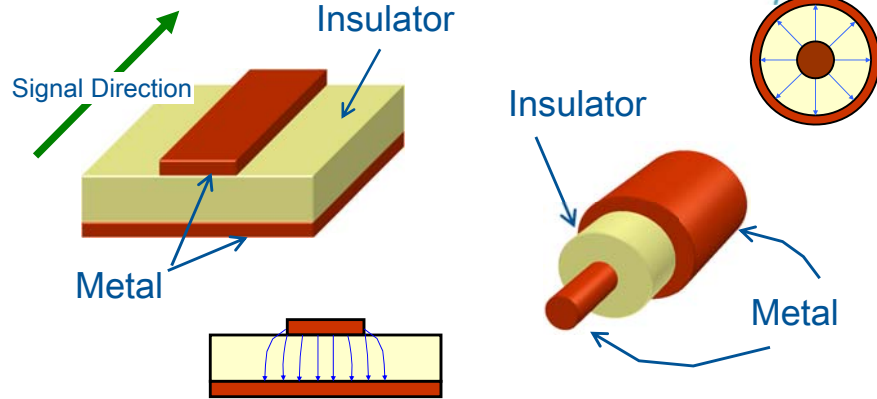
**Blue area:** Transmission Line mode  
**Gray area:** Lumped RC area

For over 1GHz signal propagation through 1cm inter-connect line, the transmission line is required. Interconnect length less than 100μm can be treated as the conventional lumped RC circuit at over several tens GHz.

Fundamental frequency of pulse:  $f_F$   $f_c = f_F$   
Critical Frequency:  $f_c$

# Possible transmission line structure

181



Micro-Strip Line Type

Co-Axial Cable Type

Kazuya Masu

# Possible transmission line

182

**Our group**

- 2D/3D simulation
- Fab and measure of TR line on LSI chip

**Pair Line Structure (Differential TR line)**

**Features of pair line**

- No ground plain
- High endurance against common mode cross talk

**Top two layers for GHz signal transmission**

**To be implemented in the multi-level interconnect structure using the top two metal layers**

**New Structure**

Kazuya Masu

# Outline

183

1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
5. RF回路設計に関わる事柄
  1. 電磁波の放射と放射インピーダンス
  2. 線路: 伝送線路
  3. 長距離伝送の考え方
  4. いくつかの線路の特性インピーダンス
  5. 何故、線路は50Wなのか。
6. まとめ

Kazuya Masu

# 平行平板線路の特性インピーダンス

184

- 単位長当たりの容量とインダクタンス

$$C = \epsilon \frac{W}{d} [F/m] \quad L = \mu \frac{d}{W} [F/m]$$

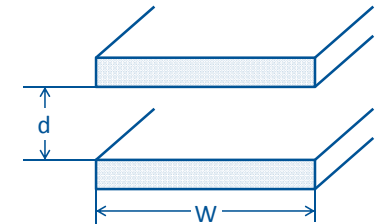
- 特性インピーダンス  $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} [\Omega]$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{D}{W} [\Omega]$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m],$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cong \frac{1}{36} \pi \times 10^{-9} [F/m]$$

$$Z = 120\pi \frac{D}{W} [\Omega]$$

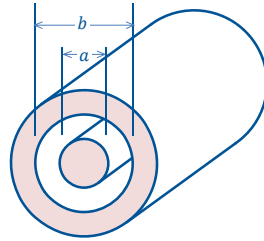


Kazuya Masu

- 単位長当たりの容量とインダクタンス

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{b}{a}} \quad [F/m]$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \left( \ln\frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right) \approx \frac{\mu}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$



$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\frac{b}{a} = 60 \ln\frac{b}{a} \quad [\Omega]$$

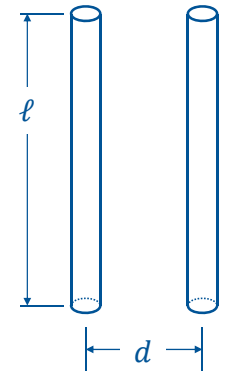
Kazuya Masu

- 単位長当たりの容量とインダクタンス

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1}\right)} \approx \frac{\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)}$$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \log_e \frac{d-a}{a} + \frac{1}{4} \right) \approx \frac{\mu}{\pi} \log_e \frac{d-a}{a}$$

$$Z = 120 \log_e \frac{d-a}{a}$$



導体半径  $a$   
 導体長さ:  $l$   
 導体間隔:  $d$

Kazuya Masu

## Characteristic Impedance

### In free space

特性インピーダンス (**Characteristic Impedance**)

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi \approx 377 \Omega$$

Kazuya Masu

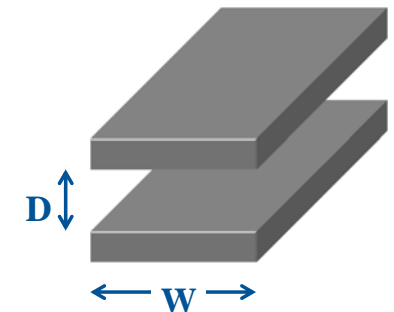
## Characteristic Impedance

In TR line, the impedance is given by

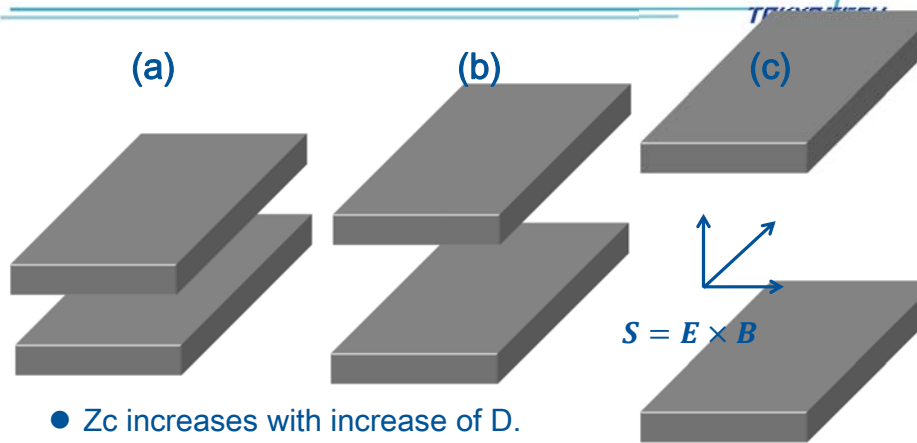
$$Z = 120\pi \frac{D}{W} \quad [\Omega]$$

$D \rightarrow \infty$  : Large  $Z_o$

How is the maximum  $Z_o$  ?



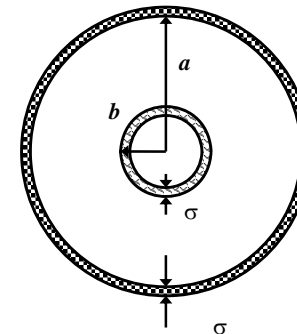
Kazuya Masu



- $Z_c$  increases with increase of  $D$ .
- If  $D$  is too large, EM wave does not feel the existence of metal line. EM wave propagates as it is in the free space.
- $Z_c$  larger than  $377\Omega$  is meaningless. In this sense, available maximum  $Z_c$  for line is  $377\Omega$ .

Kazuya Masu

同軸線路を考え、損失が最も小さくなる特性インピーダンスを求める。



内導体の半径:  $b$   
 外導体の半径:  $a$   
 表皮厚さ:  $\sigma$

特性インピーダンス

$$Z_o = \frac{(120\pi)}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

抵抗損失

$$R_{Loss} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\rho}{a\delta} + \frac{\rho}{b\delta} \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\rho}{\delta} \right) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

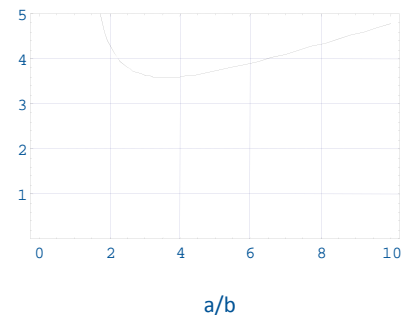
減衰定数

$$\alpha = \frac{R_{Loss}}{2Z_o} \propto \frac{\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

Kazuya Masu

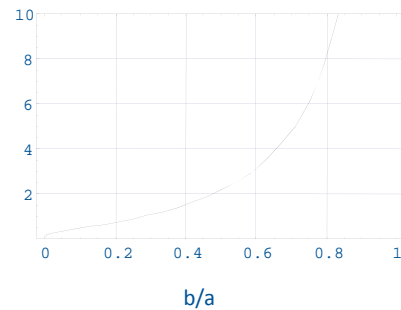
$$f = \frac{1}{a} \frac{\left(1 + \frac{a}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \quad \square \quad g = \frac{1}{b} \frac{\left(1 + \frac{b}{a}\right)}{\ln\left(1/\frac{b}{a}\right)}$$

$a$ が一定の条件！



$a/b=3.59112$ で最小

$b$ が一定の条件！



Kazuya Masu

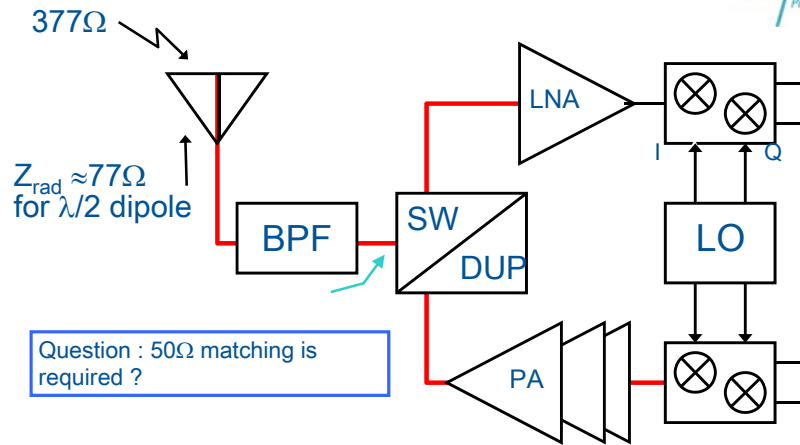
1. 電気回路と電磁気学
2. Maxwellの方程式
3. Maxwellの方程式とLSIIに利用される材料
4. 配線モデリングに役に立つ事柄
5. RF回路設計に関わる事柄
  1. 電磁波の放射と放射インピーダンス
  2. 線路: 伝送線路
  3. 長距離伝送の考え方
  4. いくつかの線路の特性インピーダンス
  5. 何故、線路は50Wなのか。

6. まとめ

Kazuya Masu



# Impedance matching in RF circuit

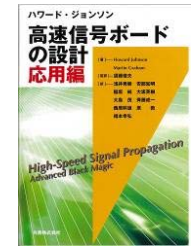
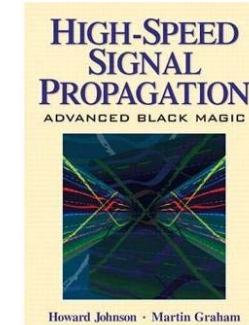
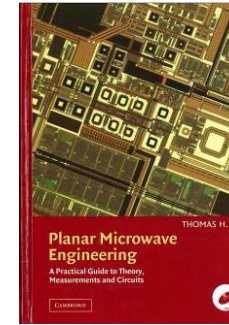


- Transceiver with discrete components requires impedance matching between components.
- In one chip CMOS RF, impedance matching is not necessary.

Kazuya Masu

# Why 50 Ω ?

- This topic returns every several years.
- Discussions are well summarized in the books.



Japanese version

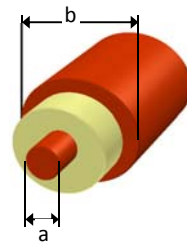
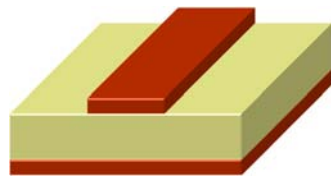
Planar Microwave Engineering: A Practical Guide to High Speed Signal Propagation: Advanced Black Theory, Measurement, and Circuits, by T H. Lee, Magic , by H. W. Johnson and M. Graham, 2003

K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008. Kazuya Masu

# Why 50 Ω ?

- In the respect of signal lines

- Coaxial cable
- Microstrip line



- In the respect of impedance matching to antenna

K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008. Kazuya Masu

# Why 50 Ω ?

- Loss due to the skin effect

Loss minimum at  $b/a \approx 3.59$

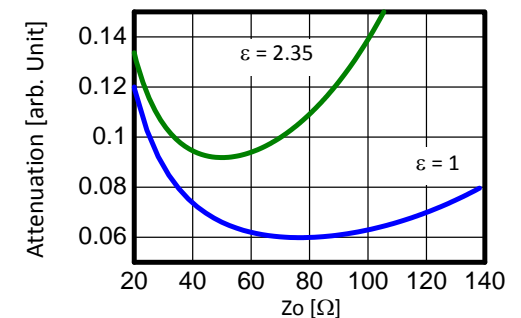
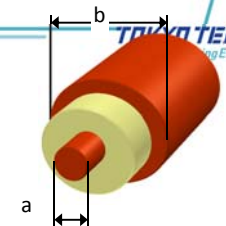
$$Z_0 \approx 77\Omega \text{ for } \epsilon_r = 1$$

$$Z_0 \approx 50\Omega \text{ for } \epsilon_r = 2.3$$

$$\alpha \propto \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{60a} \left( \frac{1 + \frac{b}{a}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right)$$

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Assumption:  $b = \text{const.}$



K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008. Kazuya Masu

## Why 50 Ω ?

197

- Maximum power deliverable to a load

$$P_{\max} \text{ at } b/a = e^{1/2} \approx 1.65$$

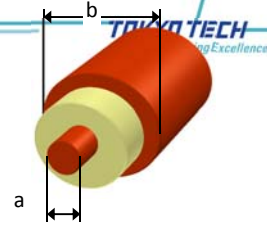
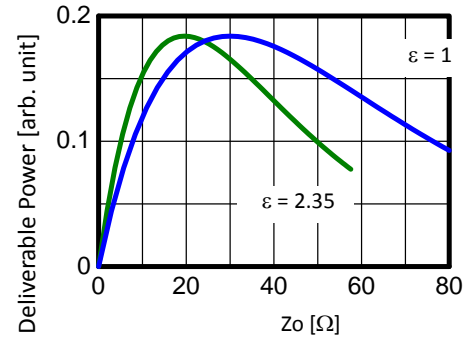
$$Z_0 \approx 30 \Omega \text{ for } \epsilon_r = 1$$

$$Z_0 \approx 20 \Omega \text{ for } \epsilon_r = 2.3$$

$$P \propto \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{60} E_{\max}^2 \left\{ a^2 \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right\}$$

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

Assumption:  $b = \text{const.}$

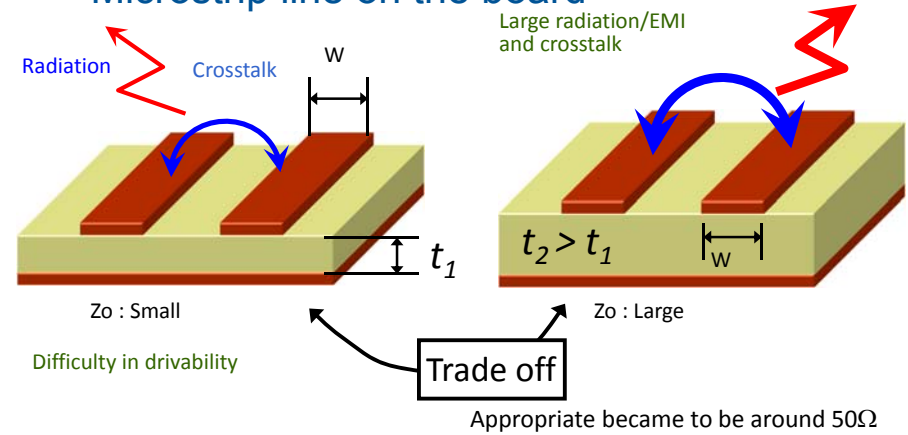


K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008, Kazuya Masu

## Why 50 Ω ?

198

- Microstrip line on the board



Assumption: the same metal width

K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008, Kazuya Masu

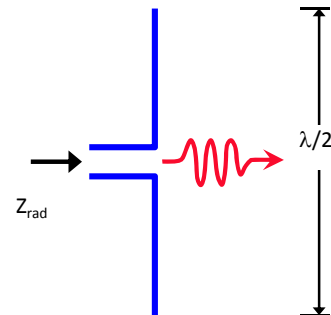
## Why 50 Ω ?

199

- Impedance matching to antenna

- $Z_{\text{rad}} \approx 77 \Omega$  for  $\lambda/2$  dipole antenna
- $Z_{\text{rad}} \approx 33 \Omega$  for  $\lambda/4$  antenna

Easy matching to antenna might be a reason why 50Ω.



K. Masu, "RF MEMS for Reconfigurable Radio", ISSCC 2008, Sunday Evening Panel, Feb. 2, 2008, Kazuya Masu

## Outline

200

- 電気回路と電磁気学
- Maxwellの方程式
- Maxwellの方程式とLSIに利用される材料
- 配線モデリングに役に立つ事柄
- RF回路設計に関わる事柄

### 6. まとめ

- まとめ
- 資料を準備して思ったこと
- シミュレータについて、一言
- 集積回路と電磁気について考えてみたいこと一覧

Kazuya Masu

- 集積回路設計は、電気回路論や電子回路論を基に行う。特に電気回路論は、電気磁気学を理論的バックグラウンドとしている。
- たまには頭の体操に電気磁気学を思い出し、かつ金属や誘電体の物理現象を紐解くことも重要であろう。最近 Magnetism も重要になっている。避けて通れないので、やはり頭の体操は必要であろう。

Kazuya Masu

- 昨年と今年度の2年度間に渡って資料を準備するにあたり、かなりの量の電磁気学に関する本を読んだ。今年は特に特殊相対性理論への展開について理解とできるだけこれを簡単に示すことができないかに注力した。Maxwellの方程式から、できるだけ簡単に特殊相対性理論まで結びつけようとしたが、残念ながら数学的手続きを簡単に示すに至らなかったのは残念だった。
- 多くの電磁気学の本を読み、電磁気学の法則にはそれを発見した人や定式化した人の名前が冠せられていることを再認識した。しかし、オリジナル論文に我々が現在知っている式が記載されているわけではない。一例はMaxwellの方程式である。我々が今知るMaxwellの方程式はHeavisideが纏めたものであることは資料中にも述べた。今我々が知る形になるまで、有名、無名の多くの科学者の努力と成果があるのだろうと思うと、科学を創ってきた先人にあらためて敬意を表したい気持ちになる。また、同時に学問の奥の深さに畏敬の念を再度もったのも事実である。
- 特に、太田浩一先生の本は電磁気学を創った人のことまで詳述されており、科学的観点から呼んでも面白い本である。科学者については、名前さえわかればWikipediaでもかなりのことまで知ることができることがわかった。

Kazuya Masu

- 私の生業は集積回路技術に関することであり電磁気学ではない。大学の勤めているが、電気磁気学の講義はしたこともない。むしろ電気磁気学は避けて通ってきた輩である。この講演を引き受けて実は後悔していた。
- やむなく本を読むことにした。以下のように勉強してみた。参考になれば幸いである。
- 一応ベクトル解析は理解していることが前提である。まだ、ベクトル解析は忘れていなかった。👉👉👉 まず、大学生協や本や並んでいる簡単な本を数冊購入した。👉👉👉 で、捲った。
- 昔読んだ電磁気学の教科書を捲った。さらに若干レベルが高いと思われる本を捲った。併せて、昔解いたはずの演習書を捲った。読んだわけではない。とにかく捲った。
- すると、何故かどの本にも書いてあることが浮かび上がってきた。で、だんだんと昔の記憶がよみがえってくるとともに、電磁気学は特殊相対性理論まで踏み込むと面白そうなんだということも浮かび上がってきた。
- 特殊相対性理論と電気磁気学の関係なんて、教えてもらったことはない。(あったかもしれないが、少なくとも記憶の片隅にも残っていない) 🤔

Kazuya Masu

- Maxwellの方程式と特殊相対性理論の関わりあいを理解できたことは、新たな発見であった。また、いくつかの問題を発見できた(解けてないが)ことも喜びであった。
- と云う事で、新たな分野を学ぶときの方法に繋がるのだが、わからなくても関連する文献、最近ではwebでも良いが、とにかく捲ってみる。読んでみることは重要だと思う。「門前小僧、経を読む」ではないが、数を読めば、浮かび上がってくるモノがある。ただし、浮かびあがらせるためには**目的**が必要である。目的に沿った何かを見出し、その本質を自らが認識したときに、面白いと感じる。
- 電磁気学に限らず、新たなことを知ろうとするときの一助になれば幸いである。



Kazuya Masu

- 講演中でシミュレータについても触れたかったができなかった。
- 最近ではシミュレータを利用する人が多いだろうが、私もシミュレータを作ったり、使ったことがある。そのときの教訓は一言で言うと「常に検算せよ」である。例えば、下記のような方法があるだろう。
  1. 簡単な数値をいれ、数式で解ける問題をシミュレーションしてみて、一致することを確認する。
  2. 手計算で計算して、シミュレーションの結果と一致することを確認する。
  3. 計算結果のオーダーが合っていることを確認する。
  4. 何かのパラメータを変化させたときの結果が、定性的な予想と一致しているかを確認する。
- 自分なりのノウハウを身につけることが重要であることを認識して欲しい。検算なしにシミュレータの結果や値を信じることはして欲しくない！

Kazuya Masu

## 電気磁気学と集積回路の観点から

1. プラズマ周波数( $\omega_p$ )、導電率緩和時間( $\tau_G$ )、誘電緩和時間( $\tau_d$ )の間に成立する下記の関係の物理的意味(物理的必然性)。

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{\epsilon m} = \frac{1}{\tau_d \tau_G} \quad (\text{プラズマ周波数})^2 = \frac{1}{(\text{誘電緩和時間})(\text{導電率緩和時間})}$$

2. 渦電流損失を簡単に表式化して説明してみたい。(上手い手がまだ見つからない)
3. 表皮効果と表面荒さの関係の簡単な表式化。
4. 異常表皮効果の簡単な表式化
5. 細線効果の簡単な表式とその導出を示すこと。

Kazuya Masu

## 電気磁気学と集積回路の観点から

6. Slow waveの考え方。
7. 左手系線路や左手系素子と集積回路。
8. 集積回路屋さん向けの線路とアンテナの説明。
9. 定常電流界と静電界の類似性を示し、おもしろい例題を提示すること。
10. Maxwellの方程式を解くという観点で、金属の導電率と誘電率(屈折率)、誘電体の分散などを統一的に記述してみることに。同じ二階の微分方程式を解いているのだから。

Kazuya Masu

Maxwellの方程式を解くという観点で、金属の導電率と誘電率(屈折率)、誘電体の分散などを統一的に記述する試み

- Drudeのモデルに従って、有限の誘電率を有する物質の比誘電率は次式となる。

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \left(1 + j \frac{1}{\omega\tau}\right)} \quad \dots (1)$$

- 電子の運動に適当な強制振動電界( $E_{ex}(t) = E_{ex}(\omega)e^{j\omega t}$ )を仮定して導出すると、

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_p^2 - \omega^2) + j \frac{1}{\omega\tau}} \quad \dots (2)$$

- (2)式は、末松安晴「電磁気学」 p.272 に記述がある。(1)と(2)の違いに言及すれば良いはず。

Kazuya Masu

- プラズマ周波数やDrudeの式を求める際に、電子の運動方程式を記述するときに、Lorentz力以外を考える。運動方程式は以下のとおり。

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}(r, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \mathbf{v}(r, t)}{\partial t} + \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m} \mathbf{v} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_{ext} \cdots (3)$$

- (3)式の一般解は、 $\mathbf{v} = C_1 e^{+p_1 t} + C_2 e^{-p_1 t}$  であり、

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm j\omega_p \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_d}{\tau}\right)^2} \cdots (4)$$

- (4)式の物理的意味の考察は？

Kazuya Masu

- $\mathbf{E}_{ext} = \mathbf{E}_{ext} e^{+j\omega t}$  の強制振動を加えたとして、(3)の微分方程式の特解を求めると、(2)式になる。
- 特解が、誘電率を与えると考える根拠が不明。

- Maxwellの方程式からの要請を全て取り込んだ微分方程式を求めて、その解を求める。境界条件として要請させる条件を入れ込むことで、プラズマ周波数の説明をしたり、複素比誘電率、複素屈折率の説明ができるはずである。Maxwellの方程式の演習としては面白く、また、物理的な描像を想像するのにひとつのアプローチかと思っている。

- これらについて当日間に合えば説明したい。



Kazuya Masu

## (参考) Bessel functions

211

- Bessel's differential equation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) u = 0 \quad \text{の解は、} J_\alpha(x) \text{ と } Y_\alpha(x)$$

$J_\alpha(x)$  : 第一種ベッセル関数

$Y_\alpha(x)$  : 第二種ベッセル関数 (Neumann関数)

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m + \alpha}$$

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad Y_n(x) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x)$$

$n$  is integer Kazuya Masu

## (参考) Modified Bessel functions

212

- Bessel's differential equation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) u = 0 \quad \text{の解は、} I_\alpha(x) \text{ と } K_\alpha(x)$$

$I_\alpha(x)$  : 第一種変形ベッセル関数

$K_\alpha(x)$  : 第二種変形ベッセル関数

$$I_\alpha(x) = j^{-\alpha} J_\alpha(x)$$

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

Kazuya Masu

## ベクトル三重積

- $(A \cdot B)C \neq A(B \cdot C)$
- $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$
- $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$
- $(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$

Kazuya Masu

## ● Gaussの発散定理

$$\int_V \text{grad} \phi \, dV = \int_S \phi \mathbf{n} \, dS \quad \int_V \text{div} \mathbf{A} \, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

## ● Stokesの定理

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

## ● Greenの恒等式

$$\int_V \phi \nabla^2 \psi \, dV = \int_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S} - \int_S (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) \, dV$$

Kazuya Masu

- $\text{grad}(\phi + \psi) = \text{grad} \phi + \text{grad} \psi$
- $\text{grad}(\phi\psi) = (\text{grad} \phi)\psi + \phi(\text{grad} \psi)$
- $\text{grad}(\phi\psi) = (\text{grad} \phi)\psi + \phi(\text{grad} \psi)$
- $\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \text{div} \mathbf{A} + \text{div} \mathbf{B}$
- $\text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \text{rot} \mathbf{A} + \text{rot} \mathbf{B}$
- $\text{div}(\phi\mathbf{A}) = (\text{grad} \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi \cdot (\text{div} \mathbf{A})$
- $\text{rot}(\phi\mathbf{A}) = (\text{grad} \phi) \times \mathbf{A} + \phi(\text{rot} \mathbf{A})$

Kazuya Masu

- $\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A}$
- $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \text{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{rot} \mathbf{B}$
- $\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
- $\text{rot} \text{rot} \mathbf{A} = \text{grad} \text{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$
- $\text{rot} \text{grad} \phi = 0, \text{div} \text{rot} \mathbf{A} = 0$
- $\text{div} \mathbf{r} = 3, \text{rot} \mathbf{r} = 0$

$$\mathbf{r} = ix + jy + kz, \quad \nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

Kazuya Masu

$$\text{rot grad } \phi = 0, \text{ or } \nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$\text{grad } \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\text{rot grad } \phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (\text{rot grad } \phi)_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0$$

$$(\text{rot grad } \phi)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0$$

$$(\text{rot grad } \phi)_z = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0$$

Kazuya Masu

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0, \text{ or } \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

div rot  $\mathbf{A}$ 

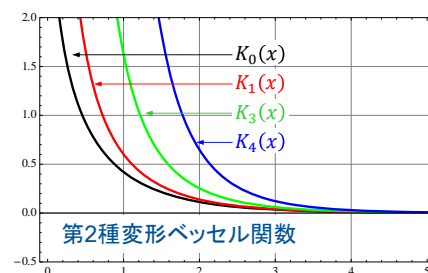
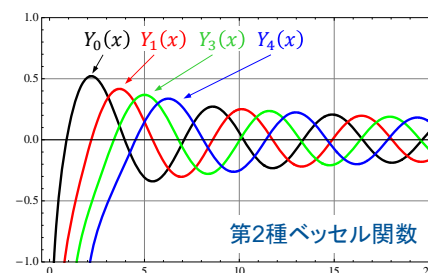
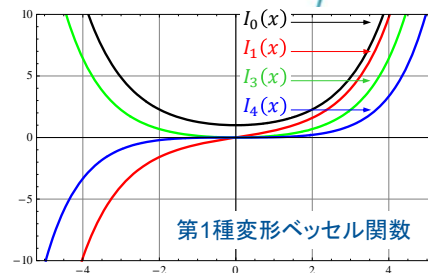
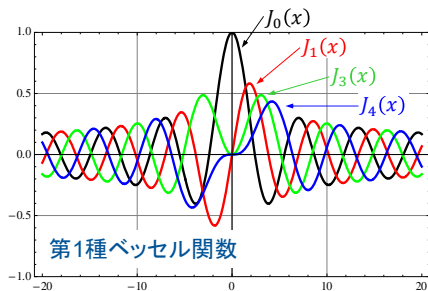
$$= \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left\{ \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

Kazuya Masu

## (参考) Bessel関数



## (参考) Kelvin functions (1)

## ● Definition:

- The Kelvin functions  $Ber_\nu(x)$  and  $Bei_\nu(x)$  are the real and imaginary parts, respectively, of  $J_\nu(x e^{3\pi/4})$ , where  $x$  is real, and  $J_\nu(z)$  is the  $\nu$ th order Bessel function of the first kind.

$$J_\nu(x e^{j3\pi/4}) = Ber_\nu(x) + j Bei_\nu(x), \text{ where } x \text{ is real}$$

$$Ber_0(x) = 1 - \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(4!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^8 - \frac{1}{(6!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{12} \dots$$

$$Bei_0(x) = \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \frac{1}{(5!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{10} - \frac{1}{(7!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{14} \dots$$

$$\sqrt{-j} = e^{j3\pi/4} = \frac{-1+j}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{+j} = e^{j\pi/4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{-j} = e^{-j\pi/4} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{+j} = e^{j5\pi/4} = \frac{-1-j}{\sqrt{2}}$$

Kazuya Masu

- Some relations (x is real)

$$J_\nu(x e^{j3\pi/4}) = Ber_\nu(x) + j Bei_\nu(x)$$

$$I_0\left(\pm \frac{-1+j}{\sqrt{2}}x\right) = Ber_0(x) + j Bei_0(x) \quad I_0\left(\pm \frac{-1+j}{\sqrt{2}}x\right) = Ber_0(x) - j Bei_0(x)$$

$$I_0\left(\pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}x\right) = Ber_0(x) - j Bei_0(x) \quad I_0\left(\pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}x\right) = Ber_0(x) + j Bei_0(x)$$

$$I_1\left(\pm \frac{-1+j}{\sqrt{2}}x\right) = \pm Ber_1(x) \pm j Bei_1(x) \quad I_1\left(\pm \frac{-1+j}{\sqrt{2}}x\right) = \mp j Ber_1(x) \mp Bei_1(x)$$

$$I_1\left(\pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}x\right) = \mp Ber_1(x) \pm j Bei_1(x) \quad I_1\left(\pm \frac{1+j}{\sqrt{2}}x\right) = \mp j Ber_1(x) \pm Bei_1(x)$$

- 文献によっては、表皮効果の表式はKelvin関数を用いて表現されている。
- おそらく数値計算を考えて、数値計算しやすい表現のためだと思われる。

Kazuya Masu

$$J_\nu(x e^{j3\pi/4}) = Ber_\nu(x) + j Bei_\nu(x)$$

$$I_0(x j\sqrt{j}) = I_0(x\sqrt{j}) = Ber_0(x) + j Bei_0(x)$$

$$I_0(x j\sqrt{-j}) = I_0(x\sqrt{-j}) = Ber_0(x) - j Bei_0(x)$$

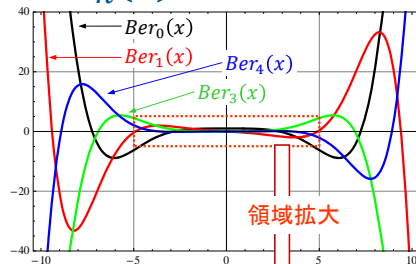
$$j\sqrt{j} = e^{j3\pi/4} = \frac{-1+j}{\sqrt{2}} \quad j\sqrt{-j} = e^{j\pi/4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{-j} = e^{j3\pi/4} = \frac{-1+j}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{+j} = e^{j\pi/4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

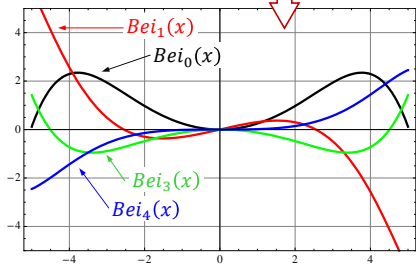
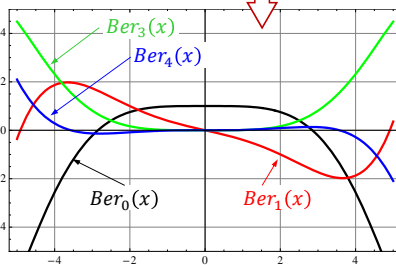
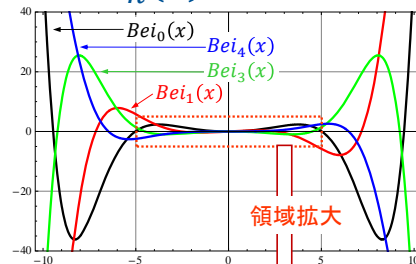
$$\sqrt{-j} = e^{-j\pi/4} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{+j} = e^{j5\pi/4} = \frac{-1-j}{\sqrt{2}}$$

Kazuya Masu

$Ber_n(x)$



$Bei_n(x)$



Kazuya Masu

- 任意関数は、直交関数で級数展開できる。
- Sin x, Cos xで展開する。(フーリエ級数)
- Bessel関数でも展開できる。
- 他にも、ルジャンドル関数などでも展開できる。
- ベッセル関数は、FM変調のところでもちらっと顔を出す。フィルタ設計の理論でも顔を出すらしい。

Kazuya Masu



1. 砂川重信、「理論電磁気学(第3版)」、紀伊國屋書店(1999)
  - 種々の本にて、オーソドックスな電磁気の教科書として薦められている。2012年、2013年と本資料を作成の際に大いに参考にさせていただいた。読み応えがあるし、良く書かれている。ただし、電気電子系の学生が読むには気合いがいります。
2. 末松安晴、「電磁気学」、共立出版(1973)
  - 19歳の時に購入して電磁気を勉強した本。研究室の学生も持っていた。今も売っているようである。初学者が読むと取っつきにくい、分かって読んで見ると、重要なところがコンパクトに記述されている。
3. 藤本三治、「解説 電磁気学」、朝倉書店、(昭和41年)
  - 今回自宅の本棚から探した本。何と18歳の時に購入した本。赤線が引いてあり読んだ形跡があった(笑)。第9章「電磁界」の部分は意外に詳しい。
4. 馬場敬之、高杉 豊、「電磁気学(改訂1)」、マセマ出版
  - このシリーズは非常に有用である。予備校で有名なマセマが発行した本である。一見、記述方法は予備校の参考書のようなものであるが、中身はかなり高度である。
  - 昨年(2012年夏)準備するときに見つけて、感激した本のひとつ。お勧めです。
5. R.P Feynman, et al., "The Feynman Lectures on Physics, II", (邦訳)「ファインマン物理学(III) 電磁気学」
  - おもしろいが、急いで読んでまとめるときには、ちょっと読みにくいかも。

Kazuya Masu

6. 太田浩一、「電磁気学の基礎(I)(II)」、東京大学出版会 (2012年)
  - 電磁気をじっくり学ぶには良く書かれている。工学系の人でも、時間があれば読むのも良いだろう。本書の面白さを理解するには気合いがいる。電磁気学を見直すのに役に立つ本と言われている。今年の準備では何度も読み返した。
7. 後藤以紀、「電磁気学本論、オーム社 (昭和24年)」
  - 旧字なので読みにくいが、式の導出などは非常に丁寧である。話の種に捲るのは良いだろう。また、用語に関しては英語だけではなく独語も記載されている。転回(または回転)(Rotation, curl; die Rotation, der Curl) 何故、Rotationが女性名詞で、Curlが男性名詞なんだろう？
  - $\partial \rho / \partial t + (\sigma / \epsilon) \rho = 0$  記述がある数少ない本である。
8. John David Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd ed., 邦訳「ジャクソン 電磁気学(上)(下)」、吉岡書店、物理学叢書90 (2002年)
  - 電磁気が何たるかまで読みこなすことはできなかった。残念ながら尋常な努力では読みこなせるとは思えない。第7章「平面電磁波と電磁波の伝搬」は物性を学ぶ人にとっても有用か。邦訳下巻第9章「放射系と多極場と多極放射」は電磁波放射の基礎と思ったが、なかなか読みこなせなかった。
9. 岩波講座現代物理学の基礎[第2版]1&2 「古典物理学(I)(II)」、岩波書店(1978年)
  - 力学、電磁気学、(特殊)相対性理論を見直してみようと思ったときに捲ってみるには良い本なのだろう。2013年の準備の際に読んでみた。

Kazuya Masu

10. Julius Adams Stratton, Electromagnetic Theory, McGray-Hill, 1941. (邦訳)「電磁理論」、生産技術センター、昭和50年
  - 電磁波を学ぶ人にはバイブルと言われていた本。
  - 英文は今でも簡単にソフトカバー版が入手できる。やはり読むべきだろうと思い捲ってみた。現在の多くの電磁気学の教科書の源流はこのあたりの本にあるのだろうと思う。訳本は現在絶版(Amazonでも見つからない。古本ネットワークで入手可能)。
  - $\partial \rho / \partial t + (\sigma / \epsilon) \rho = 0$  については煙に巻かれているような説明である。
11. S. A. Schelkunoff, Electronmagnetic Waves, D. Van Nostrand Company, 1943, (邦訳)「電磁波論」、岩波書店、1954年
  - 東工大学部の「電磁波論」の講義を受講した頃に購入した。行方不明だったので今回再度購入して、捲ってみた。やはり現在の電磁気学の教科書の源流となった本なのだろうと思う。
12. 高橋秀俊、電磁気学、裳華房(物理学選書3)、1959年
  - 書かれた時代を考えると良く記述されている本だと思う。物理から計算機まで幅広い研究と教育に携わった高橋秀俊先生の著書であったので期待したが、感動には至らなかった。
  - 何冊も電磁気学の本を読んだ後に捲ったこともあり、感激があまりなかった。自宅の本箱を覗いたら後ろの方に隠れていたにも関わらず、今回購入した (^^;;)
  - $\partial \rho / \partial t + (\sigma / \epsilon) \rho = 0$  記述がある数少ない本である。ただし、よくわからない。

Kazuya Masu

13. John C. Slater and Nathaniel H. Frank, Eelctromagnetism, McGraw Hill, 1947, (邦訳)「電磁気学(第2版)」、丸善、昭和47年
  - 力学をはじめ数多くの物理の教科書を書いたSlater and Frankの著書類のひとつ。
  - この本も19歳の時に購入していた。当時は、良く書かれたかもわかってなかった(^^;;)
  - この手の本を紐解いてみると、「場の古典論-電気力学, 特殊および一般相対性理論(ランダウ=リフシッツ理論物理学教程)」当たりも捲ってみたいように思う。確か昔買ったはずだと思ったがどこにあるかわからない。うーん。
14. 松田忠重、「入門 電磁場の古典理論」、現代工学社、1979年
  - 私の高専時代の恩師が昔、昔に興味的に書いた本。もらった時はあまり考えなかったが、今読むとそれなりの本。Amazonでは、1,500円の本が今は17,000円する。
15. 湯川秀樹、鈴木 坦、江沢 洋、「場の理論のはなし 音の場から電磁場まで」、日本評論社、2010年
  - 音の場は面白いが、残念ながら電磁場のところはあまり面白くなかった。含蓄があるのかもしれないが、感激するにまでは至らなかった。

Kazuya Masu

16. 岡部洋一、電磁気学の意味と考え方、講談社サイエンティフィック (2008年)
- おもしろい。
  - $\partial\rho/\partial t + (\sigma/\epsilon)\rho = 0$  記についてもっと詳しく記述されている本である。ただし、咀嚼できなかった。
17. 北野正雄、新版 マクスウェル方程式－電磁気学のより理解のために－、サイエンス社 (2005年)
- 数学的な準備としてテンソルの説明もされている。ただし、数学的記述が多く、電磁気学を違う立場から見直すことができたかと納得するためにはかなりの実力が要すると思う。残念ながら、現時点ではその域には達しなかった。
18. 遠藤雅守、電磁気学 はじめて学ぶ電磁場理論、森北出版 (2013年)
- 5.7節「磁場と特殊相対性理論」は新鮮である。クーロンの法則と特殊相対性原理からビオサバールの法則を導いている。
19. 馬場敬之、高杉 豊、「偏微分方程式」、キャンパス・ゼミ、マサマ出版 (平成21年)
- 波動方程式、熱伝導方程式、ラプラスの方程式の基本がわかる。円柱・球座標で偏微分方程式を通じて、ベッセル関数やルジャンドル関数を語るができるようになる。

Kazuya Masu

20. 電磁気学の原理(ときわ台学・理工系研究者 & 学生お助けサイト)
- <http://www.f-denshi.com/000TokiwaJPN/32denik/000denik.html>
  - インターネット版の電磁気学。誰がまとめているのかわからないが、良く記述されている。ただ者ではない。
  - 「8 磁場:運動の相対性からの帰結」では、クーロンの法則と特殊相対性原理からビオサバールの法則を導いている。
21. 広江克彦、「趣味で物理学」、理工図書 (2007年)
- EMANの物理学のひとつである「電磁気学(数式にはこだわらない。物理にこだわるのである)」部分などを纏めて出版した書籍。
  - <http://homepage2.nifty.com/eman/electromag/contents.html> にて、同じ内容がweb上でも読むことができる。良く纏められていると思う。
  - <http://homepage2.nifty.com/eman/relativity/contents.html> 「相対性理論」もお勧めです。
22. 前田憲一、後藤三男、「電波傳播」、岩波全書 (1953年)
- 今回自宅の本棚から探した本。これは19歳の時に購入。旧仮名遣いにもかかわらず読んだ形跡がある(笑)。最近の本に比較すると計算結果を示す図面が多い。手計算したのだろうと思う。昔の人は偉かった。

Kazuya Masu

23. 砂川重信、「電磁気学[改訂版]－はじめて学ぶ人のために」、培風館 (1988年)
- 初学者向けである。初学者がすぐに重要性を理解できるかどうかはわからないが、1-3節「遠隔作用と近接作用」の説明は分かりやすい。2-2(5)の「非オーム性」のステファン・ボルツマンの法則とオームの法則の話は面白い。
24. 中村 哲、須藤彰三、「電磁気学」、現代物理学シリーズ3、朝倉書店 (2010年)
- 理学部学生用の教科書なので、電気系の人には最初は取っつきにくいかも。それなりのレベルの教科書
25. 原 康夫、「電磁気学(I)(II)」、裳華房フィジックスライブラリー、(2001年)
- それなりのレベルの教科書。
26. 小塚洋司、「新装版 電気磁気学」、森北出版 (1998年)
27. 前野昌弘、「よくわかる電磁気学」、東京図書 (2010年)
- 最近のオーソドックスな教科書なのだろう。わかりやすい。
28. 兵藤俊夫、「電磁気学」、裳華房テキストシリーズ－物理学講談社サイエンティフィック、1999年
- 電磁波にまで言及していないが、最近のオーソドックスな教科書なのだろう。

Kazuya Masu

29. 渡邊靖志、「基礎の電磁気学 マクスウェルの方程式から始める」、培風館 (2004年)
- ベクトル解析を忘れてなければこの手の本から復習するのが良いだろう。
30. 橋本淳一郎、「単位が取れる電磁気学ノート」、講談社サイエンティフィック、2003年
31. 湯本雅恵、「電気磁気学の基礎」、数理工学社 (2012年)
- 初学者や復習しようとする人は、馬鹿にせずこの手の本から勉強し直すのが良いだろう。
32. 阿倍龍蔵、「電磁気学入門」、新物理学ライブラリー、サイエンス社、1994年
- 基本的教科書だろうと思う。
33. 西巻正郎、「電磁気学」、培風館、昭和49年
- 発行された時代(1975年前後)の入門的電磁気学の教科書。

Kazuya Masu

## 参考文献(10) 演習書

233

TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

34. 宇田川銚久、「詳解演習 電気磁気学」、廣川書店(昭和47年)
35. 石川静一、「改訂 電気磁気学演習」、学献社(昭和48年・改訂11版)
36. 後藤憲一、山崎修一郎、「詳解電気磁気学演習」、共立出版、(1970年)
  - 上記3冊は、昔から良く知られた演習書。問題が沢山載っている。個人的には(1)と(2)のかなり問題は解いた記憶がある。よく使う線路の容量やインダクタンスの計算など、今回示した結果も記載されている。
37. 砂川重信、「電磁気学演習」、物理テキストシリーズ5、岩波書店(1982年)
  - それなりのレベルの演習書
38. 長岡洋介、丹慶勝市、「例解 電磁気学演習」、物理入門コース／演習、岩波書店(1990年)
  - 最近の初学者用演習書
39. 阿倍龍蔵、「新・演習 電磁気学」、サイエンス社(2002年)
  - 最近の初学者用演習書
40. 佐藤瑞穂、「基礎電磁気学演習」、培風館(昭和35年)
  - な、な、何と16歳のときに買った演習書。内容はオーソドックス。博士の学生のときに第9章の「電磁気単位」についてこの本で勉強した記憶がある。

Kazuya Masu

## 参考文献(11) 集積回路向け

234

TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

41. F. W. Grover, "Inductance Calculations", Dover (1946)
  - 古い本であるが、良く利用されている。また、引用もされている。
42. H. Johnson and M. Graham, "High-Speed Signal Propagation", (邦訳)「高速信号ボードの設計(基礎編)及び(応用編)」、丸善(平成19年)
  - 実学的な観点から書かれた本。結構役に立つ。いくつかの事例を取り上げようとしたが、今年(2013年)は古典電磁気学に注力してしまい、取り上げることができなかった。
43. S. H. Hall and H. L. Heck, "Advanced Signal Integrity for High-Speed Digital Designs", (邦訳)「高速デジタル回路設計 アドバンスド・シグナルインテグリティ」、丸善(平成24年)
  - 一応目を通した。いろいろな話題が盛り込まれているが原理を学ぶというよりも、日々の課題に取り組む為の本。実学的。
44. Ali M Niknejad, "Electromagnetics for High-Speed and Digital Communication Circuits", Cambridge Univ. Press (2007)
  - 伝送線路の部分の最初のイントロは面白い。
45. Ron Schmitt, "Electromagnetics Explained-A Handbook for Wireless/RF, EMC, and High Speed Electronics" (邦訳)「LSI技術者のための親切な電磁気学」、丸善(2002)
  - 読み物的である。

Kazuya Masu

## 参考文献(12) 電磁波、アンテナ

235

TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

46. 後藤尚久、「アンテナ工学入門講座」、電波新聞社(2008年)
  - おそらくわかりやすいアンテナの本なのだろうと思う。
47. 稲垣直樹、「電気電子学生のための電磁波工学」、丸善(昭和55年年)
  - アンテナ基礎のオーソドックスな教科書なのだろう。
48. 内藤喜之、「マイクロ波・ミリ波工学」、電気情報通信学会編||電情報通信学会大学シリーズF-9、コロナ社(昭和61年)
  - 電磁気放射とかアンテナを勉強しようとする観点からはちょっと違う。
  - 学部3年生のときに内藤先生に教えてもらった「電気数学」における変分法やGrenn関数法の講義は面白かった。たしか、それを纏めた教科書もあるはず。
49. 松田豊稔、宮田克正、南部幸久、「電波工学」、電気・電子系教科書シリーズ24、コロナ社(2008年)
50. 高橋応明、「電磁波工学入門」、数理工学社(2011年)
  - アンテナの基礎的な教科書

Kazuya Masu

## 参考文献(13) 電磁気と物性

236

TOKYO TECH  
Pursuing Excellence

51. 御子柴宣夫、「半導体の物理[改訂版]」、培風館(1991)
  - 半導体物性の入門書ではないが、Boltzmannの輸送方程式、緩和過程などを電気系大学院生でもわかるように記述している。御子柴先生曰く、入院していた1981年に初版原稿を書き上げた。物性を生業にしない回路系の人が読むには厳しいかもしれないが名著である。
  - 私にとっては物性論に関するバイブル。しかし、先生からもらったとき(1982年)は読んでない(^^;)。真面目に読み込んだのは自分が講義するようになってから(1993年)。すばらしく良く記述されていて、自分の先生の偉さを実感。
52. 中山正敏、「物質の電磁気学」、岩波書店(岩波基礎物理シリーズ4)(1996年)
  - 回路系の人が強誘電体や磁性半導体を学ぶときに読んでみると良いかもしれない。急になれない物性の本を読むより取っつきやすいだろうと思う。
53. 志賀正幸、「材料技術者のための電磁気学入門」、内田老鶴圃(2011年)
  - 回路系の人が強誘電体や磁性半導体を学ぼうとするときに読んでみると良いかもしれない。急になれない物性の本を読むより取っつきやすいだろうと思う。
54. Carles Kittel, Introduction to Solid State Physics, 邦訳「固体物理学入門(第8版)」、丸善(平成17年)
  - 物性系の人によく読む。名著の誉れ高い本である。
55. J. M. Ziman, "Principles of the Theory of Solids, 2nd Ed." 邦訳「固体物性論の基礎、第2版」、丸善(昭和51年)
  - 回路系の人には殆ど読まないが、名著である。私も全部読み切っていないが、ところどころ読むだけでも、良く書かれていると思う。

Kazuya Masu

## 56. 佐藤勝昭、「物性何でもQ&amp;A」

- <http://home.sato-gallery.com/index.html>
- 長年の蓄積による物性に関する基本から結構深い内容まで掲載されている。とてもまねがでない。敬服。

## 57. N. F. Mott and H. Jones, "The Theory of the Metal Properties of Metals and Alloys", 1936, Oxford Univ. Press 邦訳「金属物性論」(内田老鶴圃)(1988年)

- 金属物性論の古典的名著。第一章が熱的性質から入るので面食らう人もいるかもしれない。金属論の教科書の源流になった本ではないかと思う。面白い。

## 58. Neil. W. Ashcroft and N. David Mermin, "Solid State Physics", 邦訳「固体物理の基礎」吉岡書店(1981年) (邦訳は「上(I)上(II)下(I)下(II)」の4冊)

- 上(I)は金属のことが詳述されていて、面白い。

## 59. 水谷宇一郎、「金属電子論(上)(下)」、内田老鶴圃 (1996)

- 電磁波と金属の相互作用について記述あり

## 60. 安達健五監修、「金属の電子論(1)(2)」、アグネ(1969)

- 物性的な内容は多いが、電磁気とはつながり薄

## 61. G. Burns, "Solid State Physics", 邦訳「固体の電子論」、東海大出版会(1991年)

Kazuya Masu

今回の電磁気とは関係ないですが、集積回路を学ぶ人はたまには電気回路に関する基本的な本も紐解くと良いかもしれません。

## ● 川上正光 「基礎電気回路(I)(線形定常編1)」「基礎電気回路(II)(線形定常編2)」基礎電気回路(III)(過渡・非線形編)、電子通信大学講座第13-1~3巻)、コロナ社

- 古い本ですが、レベルは高いです。基礎を学んだ後にこの手の少しレベルの高い本を学ぶことも必要です。

## ● 羽鳥孝三「基礎電気回路(1)(2)」(大学講義シリーズ)(1983)(コロナ社)

- 非常に良く掛けた教科書だと思います。

Kazuya Masu

- 本年もVLSI夏の学校での講演の機会をいただき、学振165委員会関係各位に感謝いたします。
- 昨年に引き続き、さらに昨年読めなかった本も何冊か捲ってみました。我が身の浅学さを改めて認識し、電磁気のみならず学問の奥の深さをまざまざと見せつけられました。十代の頃、学問の道に進もうとしたとき、これほどの奥の深さはとても予想などできなかったと再認識した次第です。
- 名著と呼ばれるものの多くはやはり名著です。
- 避けて通っていたゲージ変換や特殊相対性理論と電磁気学の関係については踏み込めきれませんが、このあたりまで理解すると電磁気学はまた違った意味で面白いと思います。ただし、わかったからといって、何に役に立つかは別問題です。
- 日頃何かとお教えいただいている天川修平先生に深く感謝いたします。天川修平先生の批評に耐え得る資料になったのが唯一の心配です。

Kazuya Masu